



BRASIL X PORTUGAL: pesquisas desenvolvidas no âmbito do ensino da história da matemática sobre sequências numéricas recorrentes

BRAZIL X PORTUGAL: research developed in the framework of teaching the history of mathematics on recurring numeric sequences

Francisco Regis Vieira Alves¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3710-1561>

Paula Maria Machado Cruz Catarino²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-6917-5093>

RESUMO

O presente trabalho discute um viés histórico-epistemológico e matemático correlacionado a um conjunto de aproximadamente dez sequências numéricas recorrentes definidas como objeto de investigação em pesquisas desenvolvidas no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE, no período (2017 – 2022). Com um amplo interesse em proporcionar uma difusão dos resultados de pesquisa amparados pela noção de Engenharia Didática de Formação, sobretudo uma tendência dos estudos que, a partir dos anos 90 dedicaram maior interesse para a formação inicial de professores de Matemática, o trabalho discute vários aspectos e propriedades históricas e matemáticas, segundo um viés evolutivo, que proporciona ao professor em formação inicial, em um curso de Licenciatura em Matemática. Por conseguinte, evidencia um entendimento sobre um processo histórico-evolutivo e não estático do conhecimento matemático, além de compreender o processo de construção de novas definições formais originadas nos trabalhos introduzidos hodiernamente por pesquisadores portugueses e sua correspondente disseminação no ambiente de formação inicial.

Palavras-chave: História da Matemática. Engenharia Didática de Formação. Sequências numéricas.

ABSTRACT

The present work discusses a historical-epistemological and mathematical bias correlated to a set of approximately ten recurring numerical sequences defined as an object of investigation in research developed in the Postgraduate Program in Science and Mathematics Teaching, of the Federal Institute of Education, Science and Technology of the State of Ceará - IFCE, in the period (2017 - 2022). With a broad interest in providing a dissemination of research results supported by the notion of Didactic Engineering of Training, especially a trend of studies that, from the 90's onwards, have devoted greater interest to the initial training of Mathematics teachers, the work discusses several aspects and historical and mathematical properties, according to an evolutionary bias, which it provides to the teacher in initial training, in a Mathematics Licentiate course. Therefore, it shows an understanding of a historical-evolutionary and non-static process of mathematical knowledge, in addition to understanding the process of construction of new formal definitions originated in the works introduced today by Portuguese researchers and their corresponding dissemination in the initial training environment.

¹ Doutor em Educação, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE). Professor Titular do Departamento de Matemática e Física IFCE), Fortaleza, Ceará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua: Clovis Beviláqua, nº 100, Edson Queiroz, Fortaleza, Ceará, Brasil, CEP: 60.000.000. E-mail: frgis@ifce.edu.br.

² Doutora em Matemática pela Universidade de Essex, Reino Unido, com reconhecimento desse grau pela Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD). Professora Associada com Agregação da UTAD, Vila Real, Portugal. Quinta de Prados, Vila Real, Portugal, CEP: 5001-801. E-mail: pcatarino23@gmail.com.

Keywords: History of Mathematics. Didactical Engineering and Professionalization. Numerical sequences.

INTRODUÇÃO

No contexto do ensino de determinados assuntos da História da Matemática, mediante um interesse precípua pela formação inicial de professores de Matemática, urge uma percepção de adequação e implicações significativas de sua aprendizagem, com ulterior incorporação e aperfeiçoamento dos conhecimentos que podem ser explorados em sala de aula. Neste sentido, desenvolvemos em nossos trabalhos uma perspectiva de questionamentos e críticas, na medida em que, a escolha do assunto ou do conteúdo histórico determina, de forma essencial, uma maior ou menor aproximação dos modelos explorados em classe.

Com efeito, deparamos muitos trabalhos com teor e preocupação com modelos infinitistas derivados dos rudimentos do Cálculo Diferencial e Integral e Análise, quando sabemos que, uma posterior repercussão para o ensino em sala de aula, no contexto da Educação Básica se mostra bastante difícil, por inúmeros motivos que ultrapassam os limites de discussão em um artigo científico. Por outro lado, em vários trabalhos buscamos fornecer exemplos de conteúdos matemáticos, cuja dimensão histórica costuma ser negligenciada por autores em compêndios de História da Matemática (kleiner, 2012; Koshy, 2011; Stakov, 2009). Por exemplo, no Quadro 1 trazemos o exemplo de um conjunto de dez sequências numéricas recorrentes. Acrescentamos, ainda, nas colunas ao lado direito, seus respectivos valores numéricos e seu comportamento, segundo índices positivos e negativos.

Quadro 1 – Conjunto de dez seqüências numéricas recorrentes e seus respectivos valores para índices inteiros

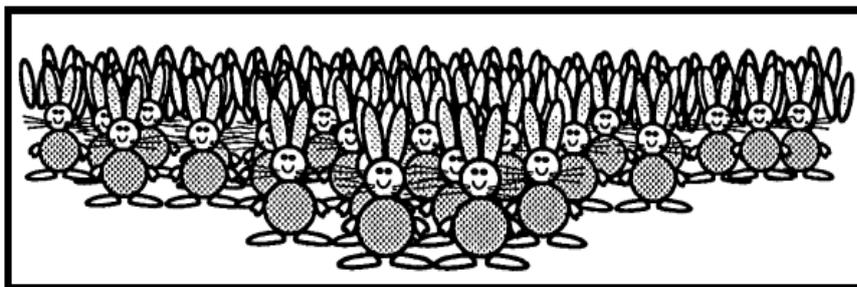
Seqüências numéricas recorrentes	Valores numéricos para índices inteiros positivos	Valores numéricos para índices inteiros negativos
(Seqüência de Fibonacci) $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para os valores iniciais $f_0 = 0, f_1 = 1$.	$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...	$\{f_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$..., -233, 144, -89, 55, -34, 21, -13, 8, -5, 3, -2, 1, -1, 0.
(Seqüência de Lucas) $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$, para os valores iniciais $L_0 = 1, L_1 = 3$.	$\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ...	$\{L_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$..., 18, -11, 7, -4, 3, -1, 2.
(Seqüência de Pell) $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$, para os valores iniciais $P_0 = 0, P_1 = 1$.	$\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 0, 1, 2, 5, 12, 29, ...	$\{P_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$..., -70, 29, -12, 5, -2, 1
(Seqüência de Jacobsthal) $J_{n+1} = J_n + 2J_{n-1}$, para os valores iniciais $J_0 = 0, J_1 = 1$.	$\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, ...	$\{J_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$..., ..., ..., $\frac{11}{32}, -\frac{5}{16}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0$
(Seqüência de Padovan ou Coordonier) $C_{n+1} = C_{n-1} + C_{n-2}$, para os valores iniciais $C_0 = 1, C_1 = 0$.	$\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, ...	$\{C_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$...2, -1, 0, 1, -1, 1, 0, 0, 1, 0, 1.
(Seqüência de Perrin) $Q_{n+1} = Q_{n-1} + Q_{n-2}$, para os valores iniciais $Q_0 = 3, Q_1 = 0$.	$\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22, 29, ...	$\{Q_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$..., 6, -7, 5, -1, -2, 4, -3, 2, 1, -1.
(Seqüência de Mersenne) $M_{n+2} = 3M_{n+1} - 2M_n$, para os valores iniciais $M_0 = 0, M_1 = 1$.	$\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, ...	$\{M_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$..., -255/256, -127/128, -63/64, 31/32, - 15/16, -7/8, -3/4, -1/2.
(Seqüência de Oresme) $O_{n+2} = O_{n+1} - (1/4)O_n$, para os valores iniciais $O_0 = 0, O_1 = 1/2$.	$\{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \frac{5}{32}, \dots$	$\{O_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$..., -896, -384, -160, -64, -24, -8, -2.
(Seqüência de Narayana) $N_{n+1} = N_n + N_{n-2}$, para os valores iniciais $N_0 = 1, N_1 = 1$.	$\{N_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, ...	$\{N_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$..., -60, 41, 28, -19, 13, -9, 4, -3, -1, 0.
(Seqüência de Leonardo³) $Le_{n+1} = 2Le_n - Le_{n-2}$, para os valores iniciais $Le_0 = 1, Le_1 = 1$.	$\{Le_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 1, 1, 3, 5, 9, 15, 25, 41, 67, 109, 177, 287, ...	$\{Le_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$..., 67, -43, 25, -17, 9, -7, 3, -3, 1, -1.

Fonte: Elaboração dos autores

³A referida seqüência foi introduzida pela primeira vez no trabalho de Catarino & Borges (2020).

No quadro 1 trazemos alguns exemplos de valores numéricos assumidos por um conjunto de dez sequências numéricas recorrentes. Assinalamos (nas colunas à direita) seus correspondentes valores quando passamos a considerar um conjunto ampliado de índices inteiros. Tal propriedade representa um processo de generalização das sequências numéricas.

Figura 1 –Possibilidades de generalização da sequência de Fibonacci segundo Gullberg (1997)



Fonte: Gullberg (1997, p. 286)

Em nossos trabalhos temos assinalado que os autores de compêndios de História da Matemática discutem ou abordam, de forma episódica e, sobretudo, como um teor de curiosidade superficial, o caso da Sequência de Fibonacci e a da Sequência de Lucas, desconsiderando completamente o caso, por exemplo, da Sequência Generalizada de Fibonacci e a Sequência Generalizada de Lucas (Alves, 2018; Gould, 1981; Harman, 1981; Iver, 1961; Oliveira & Alves, 2019; Vieira & Alves, 2019a) que permitem um exame de outras propriedades abstratas (como indicamos no Quadro 1) e que ultrapassam um viés lacônico, costumeiramente voltado ao emblemático problema do nascimento de pares de ‘coelhos imortais’. (Gullberg, 1997; Singh, 1985; Vieira & Alves, 2019b).

Por outro lado, em um contexto de formação inicial de professores de Matemática, se mostra imprescindível uma sistemática planejada e estruturada de ações, quando consideramos os fenômenos de ensino e de aprendizagem que envolvem situações de modelização do saber matemático e, de forma particular, quando lidamos com uma perspectiva histórico-evolutiva do saber. Nesses termos, a noção de Engenharia Didática de 1ª geração e a noção de Engenharia Didática de Formação de modo *standard* na pesquisa em Educação Matemática costumam envolver um denso cenário de indicadores para a pesquisa.

Para tanto, vejamos as explicações de Artigue (2015, p. 469) quanto ao componente da tradição e emergência da Engenharia Didática e sua ulterior repercussão para a consolidação da área, sob a influência de uma cultura francófona de ensino/aprendizagem da Matemática.

Do lado prático, tais metodologias foram julgadas necessárias para estabelecer relações produtivas entre pesquisa e prática, pois permitem que os pesquisadores considerem os sistemas didáticos em seu funcionamento concreto e prestem a atenção necessária aos diferentes

constrangimentos e forças atuantes sobre eles, que poderiam ser negligenciados de outra forma. A Engenharia Didática surgiu assim como uma metodologia de pesquisa e desenvolvimento baseada em realizações em sala de aula na forma de sequências de aulas, informadas pela teoria e colocando à prova as ideias teóricas. Naquela época, o que predominava na comunidade didática francesa era a Teoria das situações didáticas surgidas no final dos anos 1960. (Artigue, 2015, p. 469).

No excerto anterior, constatamos um binômio tradicional e indissociável que envolve a (Engenharia Didática – Teoria das Situações Didáticas) que, durante muito tempo, como constata Artigue (2015; 2020), permitiu um grande acúmulo de conhecimentos à respeito da atividade do estudante. Por outro, ao decurso de algumas décadas envolvendo o incremento de pesquisas balizadas pela noção de Engenharia, se mostra natural esperar um processo de evolução, ajuste e aperfeiçoamento da própria teoria, quando consideramos por referência uma cultura essencialmente francófona de ensino e tradição das práticas acadêmicas na universidade. Nesses termos, Artigue (2015) aponta indicadores que garantiram o caráter de confiança de toda uma comunidade científica diante dos resultados de sua aplicação.

Olhando para décadas de pesquisa em Engenharia Didática, o que fica evidente é que os resultados da pesquisa em Engenharia Didática estão longe de se limitar à produção e validação de projetos didáticos. A pesquisa em Engenharia Didática também tem sido uma ferramenta altamente produtiva para a compreensão do funcionamento dos sistemas didáticos e para a identificação de fenômenos didáticos. Por décadas a pesquisa em Engenharia Didática tem sido uma ferramenta essencial para o desenvolvimento de construções teóricas que fazem jus à complexidade dos sistemas envolvidos no ensino e aprendizagem da matemática. (Artigue, 2015, p. 476).

Diante do cenário anterior, concebemos o seguinte questionamento: No contexto do ensino, por intermédio da História da Matemática, como estruturar uma sistemática de pesquisa e investigação amparada pela noção de Engenharia Didática, com o tema ‘sequências numéricas recorrentes’ objetivando a formação inicial de professores de Matemática?

Com a indicação do questionamento anterior, nas seções subsequentes, assinalamos o nosso objetivo principal do presente trabalho que reside em apresentar os resultados de pesquisas desenvolvidas no período (2017 – 2022) no Programa de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia - IFCE, com amparo de uma sistemática e de rigor científico proporcionado pelos constructos teóricos da vertente francesa da Didática da Matemática. Todas as amostras consideradas e indivíduos participantes das pesquisas foram professores de Matemática em formação inicial.

Por outro lado, tendo em vista que a amostra do conjunto de pesquisas considerado se dedica ao exame da atividade e da aprendizagem do professor de Matemática, em um contexto de investigação histórica, na seção subsequente indicaremos alguns aspectos da Engenharia Didática de 2º geração ou de Formação (Perrin-Glorian, 2011). Desse modo, por influência dos

trabalhos de Perrin-Glorian & Bellemain (2016) e Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian (2017) assinalamos um interesse precípua pela produção de situações didáticas de ensino no contexto histórico, não apenas como consequência da metodologia, mas como parte dos objetivos da pesquisa. Desse modo, o interesse pelo o estudo de sua adaptação visando às condições normais de ensino e das necessidades dos professores.

1. REFERENCIAL TEÓRICO: engenharia didática de formação

Quando examinamos alguns documentos históricos originados da vertente francesa da Didática da Matemática conseguimos distinguir uma mudança de interesse das pesquisas que, de modo inicial e por influência do pensamento de Brousseau (1986; 1997) preservavam uma maior atenção à atividade e aprendizagem do estudante. Não obstante, depois de algum tempo, ocorreu uma compreensão sobre relativa negligência de análise necessária do papel, até então pouco questionado, à respeito do professor de Matemática. Nesses termos, Artigue (2002) adverte a emergência das seguintes preocupações no interior da comunidade científica.

Mesmo que tenha sido formada na França, adotando uma abordagem sistêmica, a Didática da Matemática, no início, concentrou seus esforços na disciplina de aprendizado e em suas interações com o conhecimento. O professor, parceiro do pesquisador no desenho e experimentação da Engenharia Didática ou potencial usuário dos resultados da pesquisa, permanece uma figura transparente, pouco questionada. No final da década de 1980, no entanto, as limitações induzidas por esse ponto de vista eram cada vez mais sentidas e a necessidade de considerar o professor como um ator pleno na situação didática, tão imprevisível e previsível quanto a aluno em seu comportamento, se impõe à comunidade de pesquisa. (Artigue, 2002, p. 66)

No excerto que colocamos em destaque logo a seguir podemos constatar que Perrin-Glorian & Bellemain (2016) indicam, de forma inequívoca, determinados problemas que correspondem às barreiras e dificuldades no contexto da divulgação, reprodução dos modelos e a disseminação dos resultados derivados de pesquisas amparadas pela Engenharia Didática, sem desconsiderar, os próprios fatores limitantes dos professores de Matemática que se envolviam nas pesquisas e manifestavam dificuldade correspondente à incorporação efetiva de determinados pressupostos em sua prática ordinária, isto é, utilização em sala de aula.

A preocupação com o uso dos resultados da pesquisa no ensino comum se reflete no trabalho que acabamos de mencionar. As dificuldades de transmitira Engenharia Didática e as necessidades de formação de professores também revelaram a necessidade de estudar mais de perto o funcionamento da educação ordinária do ponto de vista dos constrangimentos institucionais (incluindo sociais) que enquadram o exercício da profissão docente e a conduta de

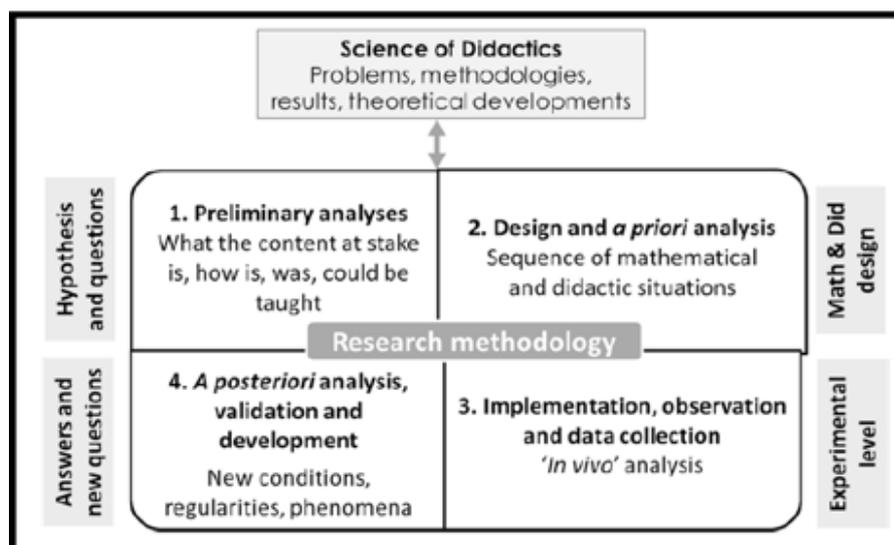
classe. Esta pesquisa geralmente ocorreu com base em observações naturalistas, em vez de Engenharia Didática. No entanto, a fronteira entre a observação naturalista e a Engenharia Didática nem sempre é tão clara quanto parece e a Engenharia Didática (ou a adaptação de produtos resultantes da Engenharia Didática anterior) também tem sido usado como meio de estudo na educação comum e como meio de formação de professores. (Perrin – Glorian & Bellemain, 2016, p. 36).

Com o amparo da perspectiva de Perrin-Glorian & Bellemain (2016) e outros autores (Barquero & Bosch, 2015; Témplier, 2013) registramos os avanços cada vez mais representativos e a contribuição da 2ª geração da Engenharia Didática ou Engenharia Didática de Formação visando um contexto de formação de professores e aprendizagem profissional do educador matemático. Nesse sentido, na figura 2 visualizamos um fluxograma mnemônico sugerido por Barquero & Bosh (2015) que explicam as fases largamente comentadas na literatura científica (Artigue, 1990; 1991; 2002; 2015; 2020) denominadas de: análises preliminares, análises *a priori*, implementação e observação (análises ‘*in vivo*’) (Barquero & Bosch, 2015), análises *a posteriori* e validação da Engenharia⁴.

De modo especial, assumimos posicionamento semelhante ao de Barquero & Bosh (2015), sobretudo quando examinamos a implementação do aparato construído e que inclui a intervenção didática previamente estruturada, sua observação e a coleta de dados. Este nível experimental envolve uma análise “*in vivo*”, isto é, uma análise desenvolvida em tempo real (ou logo após) o que está acontecendo na sala de aula. Por sua vez, em sua tese de doutorado e outros trabalhos, o pesquisador francês Témplier (2012; 2013) desenvolveu investigações com o amparo da Engenharia Didática, tendo em vista a concepção e desenvolvimentos de recursos pedagógicos, com um interesse por sua descrição para um conjunto de professores participantes do estudo. De modo particular, em sua tese, o autor declara o interesse em “identificar as condições que um recurso deve verificar para auxiliar os professores a melhorar o seu ensino de numeração” (Tempier, 2013, p. 403). Assinalamos os trabalhos de Tempier (2013) tendo em vista uma perspectiva que se aproxima de nosso escopo em aperfeiçoar o ensino de sequências e a constituição de recursos sobre o tema.

⁴ De forma geral, quando mencionamos a noção de validação interna (Artigue, 2020) fazemos referência ao *modus operandi* do investigador que deve confrontar os dados da análise *a priori* com os dados da análise *a posteriori*. Todavia, com o amparo do pensamento de Laborde (1997) podemos acrescentar a possibilidade de validação interna e validação externa à sequência didática desenvolvida com o grupo de estudantes (participantes e não participantes de uma investigação com amparo de uma Engenharia Didática de Formação).

Figura 2 –Descrição de um itinerário para o desenvolvimento de uma Engenharia Didática de Formação segundo Barquero & Bosch (2015)

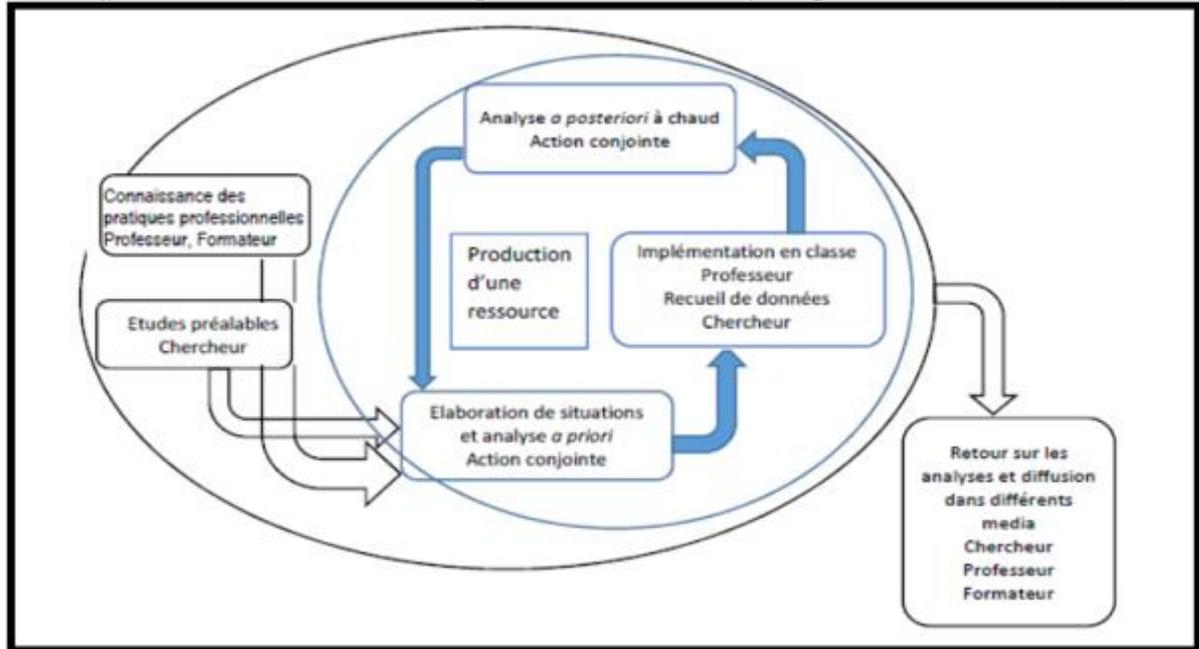


Fonte: Barquero & Bosch (2015)

Por outro lado, quando consultamos os trabalhos de Perrin-Glorian (2019) podemos constatar determinadas sub-categorias da noção de Engenharia Didática, significada como um fenômeno-tecnológico capaz de provocar e de examinar fenômenos didáticos em condições deonticamente aceitáveis para professores e alunos. (Perrin-Glorian, 2019). Neste cenário, podemos identificar as subcategorias: Engenharia Didática para o Desenvolvimento e a Formação, Engenharia Didática Colaborativa, Engenharia Cooperativa. Assumimos posição concorde com Perrin-Glorian (2019, p. 11) ao comentar que “estamos interessados aqui na Engenharia Didática que inclui em seus objetos de estudo a colaboração entre professores e pesquisadores visando produzir recursos dissemináveis para o ensino regular.”

Para ilustrar, Perrin-Glorian (2019) se ampara no fluxograma que indicamos na figura 3 e explica que uma Engenharia Didática visando o desenvolvimento inclui estudos preliminares e dá mais espaço para questionamentos sobre o conhecimento a ser ensinado. Não obstante, nos casos de Engenharias discutidas pela didata francesa, o interesse pela produção de um recurso didático se inscreve no centro de interesses e assume papel em destaque (ver figura 3). Por outro lado, tendo em vista nosso interesse pela Engenharia Didática de Desenvolvimento e a Formação, não podemos desconsiderar a importância de testar a validade teórica desituações no nível epistemológico e cognitivo e identificar as escolhas essenciais para a Engenharia. Bem como, um componente especial destinado ao interesse pelas práticas cotidianas dos professores de Matemática e suas possibilidades de desenvolvimento, identificando os pontos que precisam de apoio. (Perrin-Glorian, 2019). Na figura 3 divisamos um esquema proposto por Perrin-Glorian (2019) visando a produção de recursos e sua disseminação no ensino ordinário.

Figura 3 –Discussão das fases da Engenharia visando a formação segundo Perrin-Glorian (2019)



Fonte: Perrin-Glorian (2015)

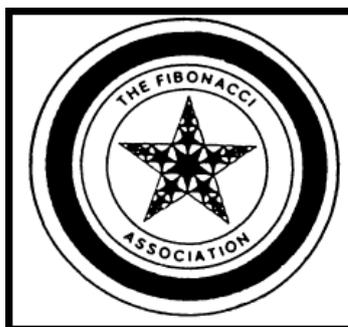
Não podemos deixar de considerar que, como consequência de uma tradição da Teoria das Situações, a elaboração de situações didáticas presentes na amostra de dissertações consultadas considera o saber matemático, a partir das variáveis definidas nas análises *a priori* e sem desconsiderar condicionantes cognitivos dos indivíduos participantes dos trabalhos examinados. Todavia, antes de abordarmos o relato de alguns trabalhos, urge considerar a tradição da pesquisa contemporânea desenvolvida por matemáticos portugueses o que concorreu para uma compreensão maior do componente histórico-epistemológico (Alves & Catarino, 2022; Derouet, 2016).

2. SOBRE A PESQUISA DESENVOLVIDA EM PORTUGAL

Antes de expressarmos a importância e tradição da pesquisa em Portugal, com interesse especial pelos processos de generalização e concepção (construção) de novas sequências numéricas, urge resgatar alguns elementos históricos que confirmam um processo científico de interesse pelo estudo de sequências numéricas, com destaque especial, para os matemáticos dos anos 60, entusiastas da Sequência de Fibonacci. Por exemplo. Gullberg (1997, p. 288) explica que “a associação Fibonacci foi fundada em 1962 na Califórnia para aumentar o interesse em números de Fibonacci e tópicos relacionados. Desde 1963, o periódico *The Fibonacci Quarterly*

proporciona a divulgação científica”. Na figura 2, visualizamos o símbolo de uma associação de matemáticos entusiastas americanos que fundaram uma revista visando fornecer uma disseminação científica sobre Fibonacci.

Figura 4 – Símbolo do periódico *The Fibonacci Quarterly* concebido por um pequeno grupo de matemáticos em 1962, na Carolina do Norte.



Fonte: Gullberg (1997, p. 288)

A pesquisa contemporânea em Matemática Pura (Catarino, 2016; 2019; Catarino & Borges, 2020; Catarino & Vasco, 2013; 2017; Catarino; Campos & Vasco, 2019; Campos, *et al.*, 2014) confirma o vigor da pesquisa e o interesse atual de pesquisadores em vários países que confirmam um campo de estudos em constante evolução, com ampla interface com várias disciplinas e campos de aplicação da Matemática. (Cook, 2004; Vieira; Alves & Catarino, 2019; Vieira, 2020). De fato, vamos dar alguns exemplos da contribuição recente da pesquisa desenvolvida em Portugal, além do caso de nosso maior interesse que representa a sequência de Leonardo, introduzida recentemente na literatura científica e preserva relações inesperadas envolvendo as emblemáticas sequências de Fibonacci e de Lucas (Catarino & Borges, 2020).

3. RESULTADOS DE PESQUISAS DESENVOLVIDAS NO BRASIL (2017 – 2022)

Na presente seção discutiremos alguns indicadores resultantes de um conjunto de 8 (oito) pesquisas de dissertações de mestrado, desenvolvidas no período (2017 – 2022). Cabe observar que, em determinados casos, tendo em vista a robustez do conjunto de publicações e resultados decorrentes do objeto de investigação, tanto publicações do âmbito da Educação Matemática, bem como em Matemática Pura, indicamos um prosseguimento, em nível de doutorado, dos trabalhos indicados por (*) no quadro 2. Por sua vez, em (**), indicamos um último objeto de investigação em desenvolvimento a partir de 2022.

Quadro 2 – Conjunto de dez sequências numéricas recorrentes e seus respectivos valores para índices inteiros.

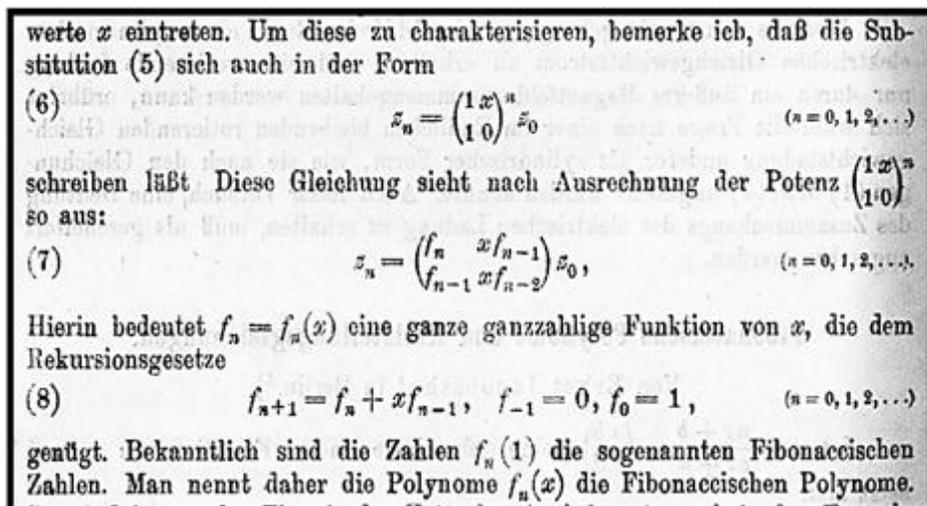
Dissertações desenvolvidas no Programa de Pós graduação em Ensino de Ciências e Matemática - IFCE	Locus da pesquisa e público alvo
Dos Santos (2017) - Uma Engenharia Didática para a noção de sequência estendida de Fibonacci: uma experiência no contexto do IFCE.	Licenciatura em Matemática, disciplina de História da Matemática, 5º semestre.
Oliveira (2018) - Engenharia Didática com o tema: relações bidimensionais, tridimensionais e n-dimensionais do modelo de Fibonacci.	Licenciatura em Matemática, disciplina de História da Matemática, 5º semestre.
Souza (2020) – Sequência Generalizada de Jacobsthal: uma Engenharia Didática sobre seu ensino.	Licenciatura em Matemática, disciplina de História da Matemática, 5º semestre.
Noronha (2020). Engenharia didática clássica sobre a sequência de Pell e seus modelos de generalização.	Licenciatura em Matemática, disciplina de História da Matemática, 5º semestre.
Vieira (2021). Engenharia Didática (ED): o caso da Generalização e complexificação da sequência de Coordonier ou Padovan.	Licenciatura em Matemática, disciplina de História da Matemática, 5º semestre.
Barros (2021). Engenharia Didática sobre os números Figurados k-dimensionai, relações recorrentes, termo geral, função geradora e representação por meio de recursos computacionais.	Licenciatura em Matemática, disciplina de História da Matemática, 5º semestre.
Bezerra (2021). Engenharia didática com o tema: sequência de Narayana e os números de Narayana.	Licenciatura em Matemática, disciplina de História da Matemática, 5º semestre.
Mangueira (2022). Sobre o processo de complexificação e hibridização e hipercomplexificação de sequências lineares recursivas. (*) (Desenvolvido no ensino remoto)	Licenciatura em Matemática, disciplina de História da Matemática, 5º semestre.
Aspectos históricos-epistemológicos e matemáticos sobre a Sequência de Leonardo com amparo em uma Engenharia de Formação. (**).	Pesquisa iniciada em 2022.
Aspectos históricos-epistemológicos e matemáticos sobre a Sequência de Padovan-Perrin com amparo em uma Engenharia de Formação. (**).	Pesquisa iniciada em 2022.

Fonte: Elaboração dos autores

De forma resumida, os trabalhos de Dos Santos (2017) e Oliveira (2018) proporcionam um vasto material sobre a sequência generalizada de Fibonacci que, em certo sentido, Oliveira (2018) aborda em um contexto histórico e evolutivo modelos de generalização de inúmeras propriedades discutidas em Dos Santos (2017).

Ernst Erich Jacobsthal (1882 – 1965) foi um teórico dos números que tinha sido expulso de Berlim e se tornou um refugiado à Noruega e Suécia entre 1939 e 1943. O mesmo foi aluno do grande matemático Ferdinand G. Frobenius (1849 – 1917). Em alguns de seus trabalhos, Jacobsthal descreveu os primeiros valores numéricos para a sequência, que produz a sequência Jacobsthal (para $x = 2$), como um caso particular de Fibonacci. (ver figura 5).

Figura 5 –Possibilidades de generalização da sequência de Fibonacci segundo Gullberg (1997)

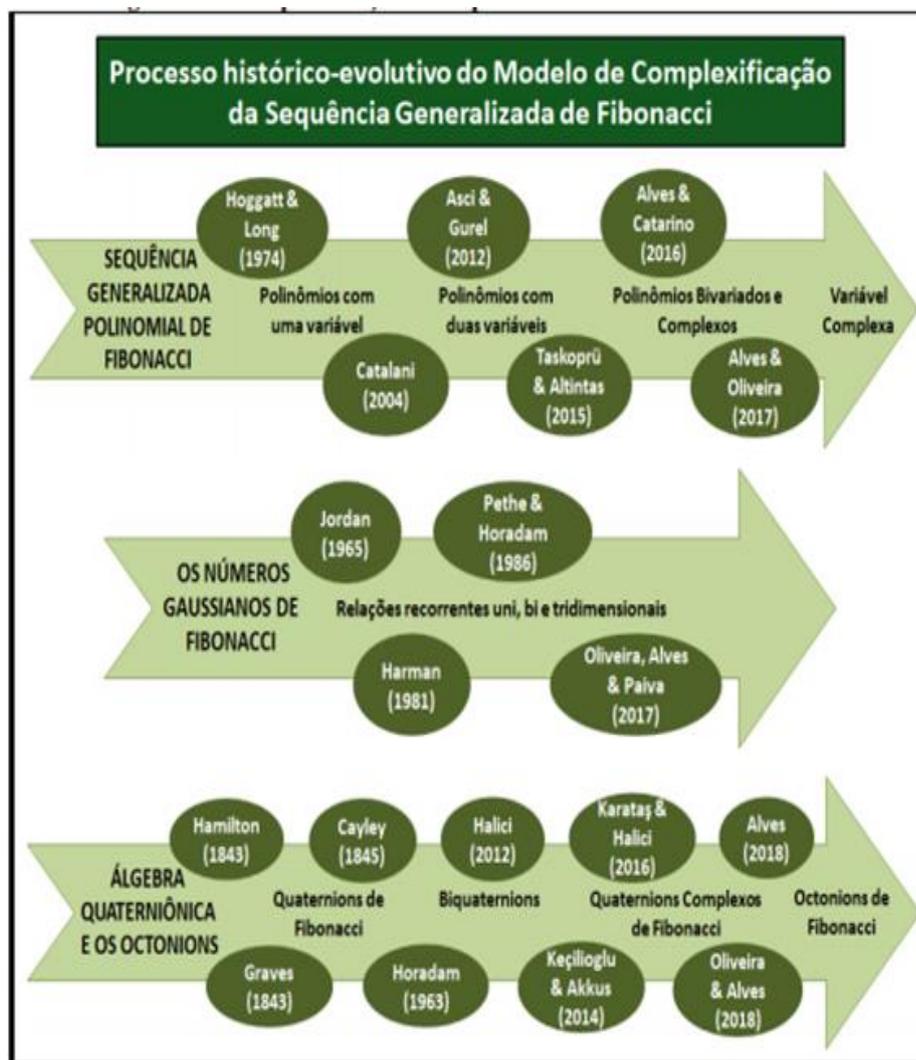


Fonte: Gullberg (1997, p. 286)

Podemos observar que o conjunto $\{J_n\}: \{0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, \dots\}$ (ver quadro 1) definida por e representado com a seguinte recorrência $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2$, com as condições iniciais $J_0 = 0, J_1 = 1$. Notamos o uso de representações de matriz e a descrição de uma segunda ordem de sequência recorrente homogêneas que, para o caso $x = 1$ podemos determinar a sequência de Fibonacci e para $x=2$ a sequência de Jacobsthal. No trabalho de Souza (2020) deparamos a descrição de um itinerário de investigação, com o amparo da Engenharia Didática, envolvendo a discussão de situações didáticas.

Em um trabalho mais recente, Vieira (2021) desenvolveu uma investigação histórica sobre uma sequência numérica desconsiderada pelos compêndios de História da Matemática, denominada de sequência de Padovan ou Coordenier. Os números de Padovan foram descobertos pelo arquiteto Italiano Richard Padovan (1935 - ?), nascido na cidade de Pádua e representam uma espécie de modelo 3D correspondente aos números de Fibonacci (Barros, *et al*, 2020). Por sua vez, o holandês Hans Van Der Laan (1904 - 1991) conduziu o curso de arquitetura e utilizou a basílica cristã primitiva de abadia como exemplo para treinar arquitetos na reconstrução de igrejas após a Segunda Guerra Mundial.

Figura 6 –Discussão de um amplo cenário histórico-evolutivo sobre a Sequência de Fibonacci segundo Oliveira (2018)

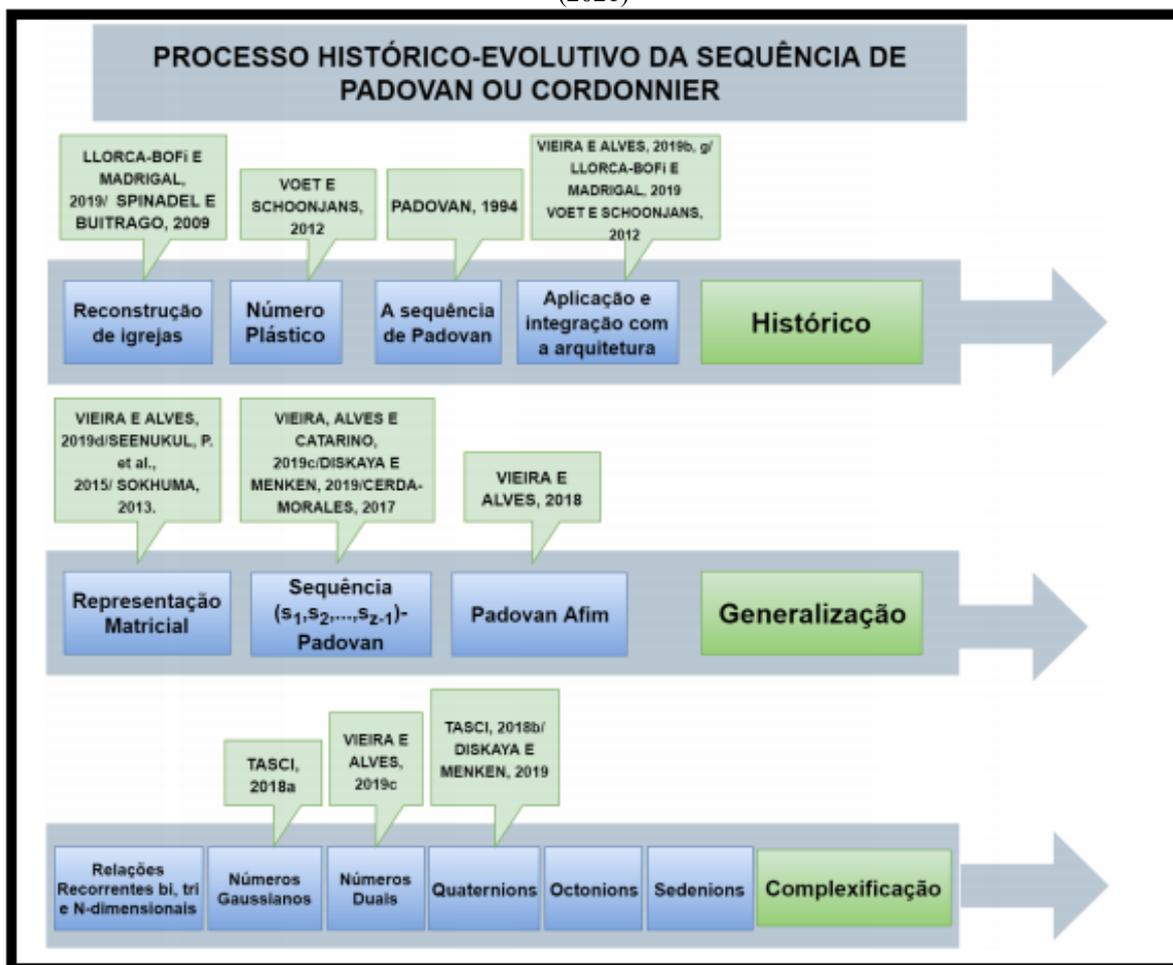


Fonte: Oliveira (2018)

Laan e seu irmão buscavam padrões para a arquitetura, e acabaram por descobrir um novo padrão de medidas onde a construção desse se dá através de um número irracional, ideal para se trabalhar em escala geométrica e objetos espaciais (retângulos, trapézios, elipses e etc).

Na figura 7, Vieira (2021) explica um viés histórico-evolutivo sobre a sequência de Padovan ou Coordonier. Cabe assinalar, todavia, a contribuição para o avanço da teoria relacionada com o interesse pela generalização da respectiva sequência, amparada e validada por inúmeras publicações nacionais e internacionais (Vieira & Alves, 2019).

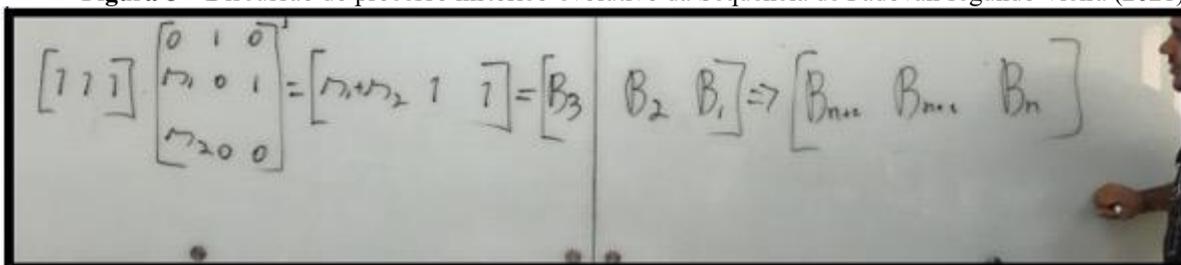
Figura 7 –Discussão do processo histórico-evolutivo da Sequência de Padovan ou Cordonier segundo Vieira (2021)



Fonte: Vieira (2021, p. 286)

Na figura 8, identificamos uma situação didática envolvendo a descoberta de propriedades recursivas, envolvendo a representação matricial vinculada com a sequência de Padovan ou Cordonier. A intervenção ocorreu no ano de 2019 e o professor (em formação inicial) comunica ao investigador a descoberta de propriedades matriciais. Cabe observar, com origem nas figuras 6, 7, 10 e 11 um amplo cenário de evolução dos objetos matemáticos considerados e que possuem íntimas relações com noções da Educação Básica, tais como: Matrizes, recorrência, Determinantes, Equações polinomiais, Números binomiais, Sistemas.

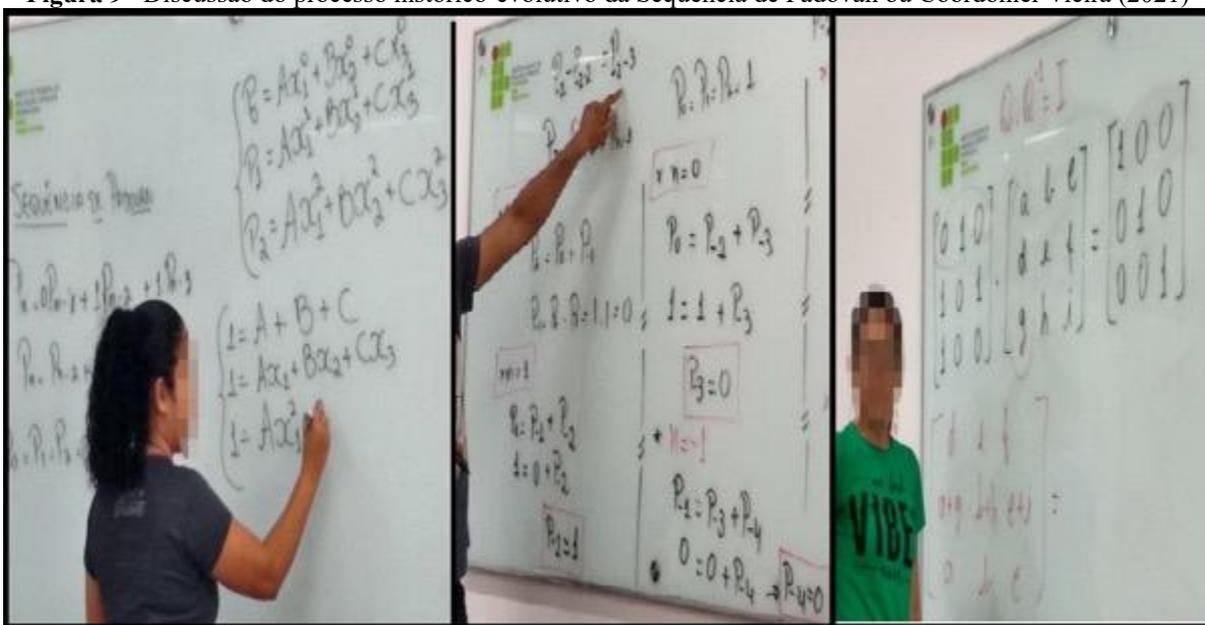
Figura 8 – Discussão do processo histórico-evolutivo da Sequência de Padovan segundo Vieira (2021)



Fonte: Vieira (2021)

Na figura 9 descrevemos três momentos envolvendo um processo de investigação dos professores. Ao lado esquerdo, na mesma figura, a professora desenvolveu e resolveu um sistema de 3 equações e 3 incógnitas, com o escopo de determinar a fórmula de Binnet (Alves, 2017). No lado direito, o professor comunicou ao pesquisador que o produto de matrizes determinou elementos da sequência de Padovan ou Coordonier, de ordem elevada. No meio da figura 9, podemos identificar o desenvolvimento e descoberta da possibilidade de cálculo de elementos com índices negativos presentes na Padovan ou Coordonier.

Figura 9 –Discussão do processo histórico-evolutivo da Sequência de Padovan ou Coordonier Vieira (2021)

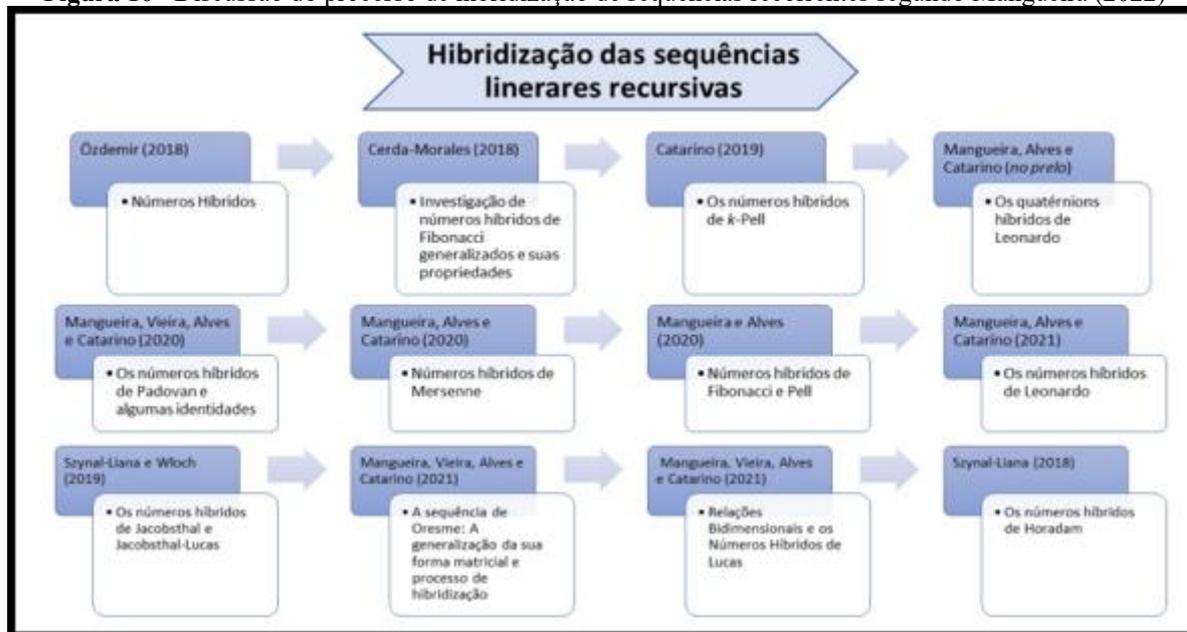


Fonte: Vieira (2021, p. 286)

Por fim, no cotejo dos trabalhos e pesquisas desenvolvidas no período (2017 – 2022) assinalamos o trabalho de Manguiera (2022) que desenvolveu uma investigação amparada pela Engenharia Didática com o interesse em dois processos matemáticos distintos, a saber: (a) o processo de hibridização de sequências numéricas recursivas (ver figura 10); (b) o processo de hipercomplexificação de sequências numéricas recursivas (ver figura). Os itens (a) e (b)

confirmam um processo evolutivo de generalização das seqüências que revela o interesse contemporâneo de pesquisadores em vários países (Sridharan; Sridharan & Srinivas, 2015).

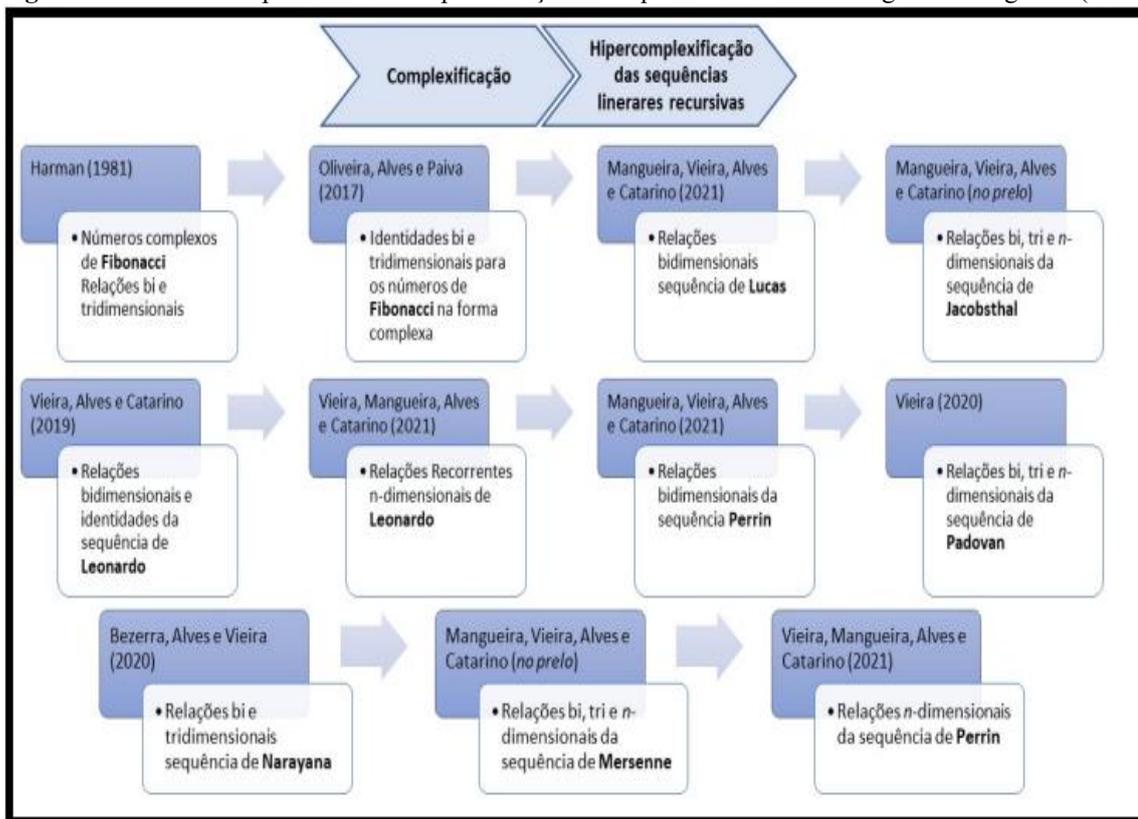
Figura 10 –Discussão do processo de hibridização de seqüências recorrentes segundo Mangueira (2022)



Fonte: Mangueira (2022, p. 286)

Na figura 11 Mangueira (2022) proporciona elementos de um cenário histórico-evolutivo sobre o processo que, do ponto de vista matemático, envolve em inserir unidades imaginárias i, j, k, \dots , considerando determinadas regras formais. Mangueira (2022) recorda o trabalho pioneiro e um dos primeiros que abordaram tal problema, como o de Harman (1981).

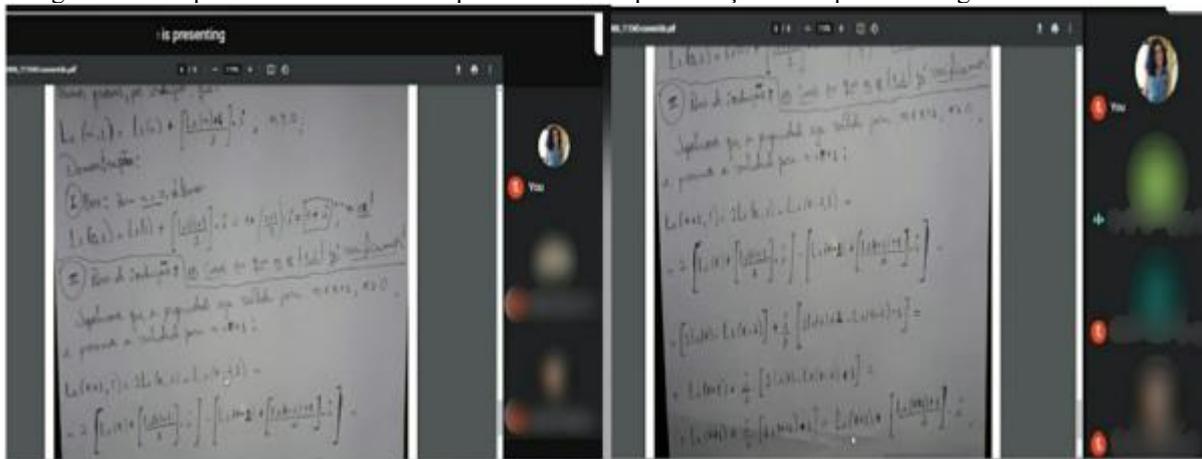
Figura 11 –Discutiu do processo de complexificação de seqüências recorrentes segundo Mangueira (2022)



Fonte: Mangueira (2022).

Na figura 12 divisamos um momento de validação da situação didática envolvendo a seqüência de Leonardo. Diante dos condicionantes impostos pelo virus Covid19, todas as intervenções ocorridas no trabalho de Mangueira (2022), com os professores participantes da pesquisa, ocorreu de forma remota. Circunstância que, em certa medida, comprometeu o acompanhamento e observações realizadas pelos pesquisador.

Figura 12 – Desenvolvimento do experimento de Mangueira (2022) de forma remota visando o cenário de gênese da seqüência de Leonardo e o processo de complexificação de seqüências originado nos anos 80



Fonte: Mangueira (2022).

CONCLUSÕES E PESQUISAS FUTURAS

Nas seções predecessoras apresentamos alguns indicadores de resultados que representam exemplos de pesquisas desenvolvidas com o amparo de um *design* com profunda tradição na vertente francesa da Didática da Matemática denominado de Engenharia Didática. Nossa amostra envolveu exemplos de pesquisas desenvolvidas em nível de mestrado, com ênfase em um contexto e assuntos originados na História da Matemática, todavia, com uma ênfase declarada pelos seus aspectos históricos – matemáticos e evolutivos (Alves, 2018; 2019a; 2019b; 2022; Derouet, 2016), sem desconsiderar a constituição de um conjunto de recursos didáticos para os professores, objetivando preencher fragilidades e deficiências encontradas em compêndios de HM sobre o assunto matemático. (Alves, 2017; Alves & Catarino, 2022)

Tendo em vista os limites de discussão em artigo científico, optamos pela indicação do viés histórico – epistemológico e matemático correspondente aos resultados derivados de uma amostra de 8 (oito) dissertações de mestrado desenvolvidas no período de (2017 – 2022), concorrendo para a constituição e a configuração de uma ampla fonte de estudo, de pesquisa, de consulta e disseminação para professores de Matemática em formação inicial e continuada.

Desde seus primórdios históricos, a noção de Engenharia Didática (Perrin-Glorian, 1993) foi concebida como uma metodologia na interface entre a ‘pesquisa’ e o ‘ensino’. Particularmente, depois de algumas décadas, o caso da Engenharia Didática destinada à produção de recursos para a educação regular e visando o uso de recursos didáticos para professores é um tema de pesquisa recente em Educação Matemática (Perrin-Glorian, 2019). Em todo caso, a despeito de identificarmos, de forma contemporânea, várias tendências da noção de Engenharia, assumimos posição concorde com Perrin-Glorian (1993; 2011; 2019) ao mencionar um fundamental processo estratégico de cooperação entre professores e o pesquisador objetivando uma sinergia equilibrada.

Finalmente, os problemas e dificuldades causadas pelo vírus Covid19 devem preservar efeitos prolongados no ensino e contexto da pesquisa, todavia, no bojo dos trabalhos em desenvolvimento (ver Quadro 1), podemos prever um retorno para o ensino presencial, o que constitui um componente importante para o desenvolvimento de pesquisas com os temas indicados em (**), agora seguindo um itinerário de desenvolvimento em nível de doutorado.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio e suporte financeiro concedido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq.

REFERÊNCIAS

- Alves, F. R. V. (2017). Fórmula de de Moivre, ou de Binet ou de Lamé: demonstrações e generalidades sobre a sequência generalizada de Fibonacci - SGF. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 17(1), 1-16.
- Alves, F. R. V.; Catarino, P. M. (2022). A Sequência de Padovan ou de Coordonier. *Revista Brasileira de História da Matemática – RBHM*, 22(45), 1 – 22.
- Alves, F. R. V.; Catarino, P. M. M. C.; & Mangueira, M. C. S. (2019). Discovering theorems about the gaussian mersenne sequence with the maple's help: implications for the mathematical teachers in brazil. *Annals Computer Science Series*, 17(1), 69 - 77.
- Alves, F., R. V. (2018). The Quaterniontonic and Octoniontonic Fibonacci Cassini's Identity: An Historical Investigation with the Maple's Help. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13(1), 1-14.
- Alves, F., R. V. (2019a). Sequência de Oresme e algumas propriedades (matriciais) generalizadas. *Revista eletrônica paulista de matemática*, 16(1), 28-52.
- Alves, F., R. V. (2019b). Brahmagupta e alguns elementos históricos da matemática hindu, *Revista Thema*, 16(4), 755 – 763.
- Alves, F. R. V. (2022). Didactic Engineering (DE) and Professional Didactics (PD): A Proposal for Hist oposal for Historical Research in Brazil on Recurring Number Sequences. *The Montana Math Enthusiast*, v. 19, p. 1/239-274.
- Alves, F., R. V.; Vieira, R. P. M. (2020). The Newton Fractal's Leonardo Sequence Study with the Google Colab. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(1), 1-11.
- Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2.3), 241-285.
- Artigue, M. (1991). Ingénierie Didactique en Mathématiques, *Didactique des Mathématiques*, 2(1), 1 – 22.
- Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique: quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui ? *Les Dossiers des Sciences de l'Éducation*, 8(1), 59 – 72.
- Artigue, M. (2015). Perspectives on Design Research: The Case of Didactical Engineering . In: *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education Examples of Methodology and Methods*. (pp. 467 – 496). New York: Springer.
- Artigue, M. (2020). Méthodologies de recherche en didactique des mathématiques : Où en sommes-nous ? *Revista Educação Matemática e Pesquisa*, v. 22, nº 4, 1 – 19.

- Barros, E. *et al.* (2020). Hibridização dos números triangulares: uma análise preliminar e a priori e a visualização por meio do software GeoGebra, *Revista Indagatio Didactica*, 12(3), 411 – 435.
- Barquero, B; & Bosch, M. (2015). Didactic Engineering as a Research Methodology: From Fundamental Situations to Study and Research Paths. In: Watson, A.; Ohtani, Minoru. *Task Design In Mathematics Education*. ICMI study 22, New York: Springer, 251 – 270.
- Bicknell-Johnson, M. (1987). A short History of The Fibonacci Quarterly, *The Fibonacci Quarterly*, v. 25, nº 1, 2 – 6.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. (thèse d'État), Bourdeaux: Université Bourdeaux I. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00471995>
- Campos, H. *et al.* (2014). On Some Identities of k-Jacobsthal-Lucas Numbers, *Journal of Mathematics and Analysis Hikari*, 8(10), 489 – 494.
- Catarino, P. M. C. & Borges, A. (2020). On Leonardo Numbers, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 89(1), 71 – 86.
- Catarino, P. M. C. (2016). The modified Pell and the Modified k-Pell Quaternions and Octonions, *Advances in Applied Clifford Algebra*, 26(2), 577 – 590.
- Catarino, P. M. C. (2019). On k-Pell hybrid numbers, *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 22(1), 83 – 89.
- Catarino, P. M. C.; & Vasco, P. (2013). On Some Identities and Generating Functions for k-Pell-Lucas Sequence, *Applied Mathematical Sciences*, 7(98), 4867 – 4873.
- Catarino, P. M. C.; & Vasco, P. (2017). On dual k-Pell quaternions and octonions, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14(75), 1 – 20.
- Catarino, P. M.; Campos, H.; & Vasco, P. J. (2019). A note on k-Pell, k-Pell-Lucas and Modified k-Pell numbers with arithmetic indexes, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 89(1), 97 – 107.
- Cook, C. (2004). Some sums related to sums of Oresme numbers. In: Howard, F. T. *Application of Fibonacci numbers*. Dordrecht: Springer, 87 - 101.
- Derouet (2016). *La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse en terminale S. Etude de la conception et de la mise en oeuvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul intégral*. Thèse de doctorat, université Paris-Diderot.
- Dos Santos, A. A. (2017). *Uma Engenharia Didática para a noção de sequência estendida de Fibonacci: uma experiência no contexto do IFCE* (dissertação de mestrado), Fortaleza: Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil.
- Gould, H. W. (1981). A history of the fibonacci q-matrix and a higher-dimensional problem, *The Fibonacci Quarterly*, 19(3), 250 – 257.
- Guedes, A. M. (2020). *Uma Engenharia Didática para o estudo da Sequência Generalizada de Lucas (SGL)* (dissertação de mestrado), Fortaleza: Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil.
- Gullberg, J. (1997). *Mathematics: from the birth of numbers*. New York: Norton.

- Harman, C. H. (1981). Complex Numbers, *The Fibonacci Quarterly*, 19(1), 82 – 87.
- Iver, M. (1961). Some Results on Fibonacci Quaternions, *The Fibonacci Quarterly*, 7(2), 201 – 211.
- Kleiner, I. (2012). *Excursions in the History of Mathematics*. New York: Springer.
- Koshy, T. (2011). *Fibonacci and Lucas Numbers and Applications*. New York: John Wiley and Sons.
- Laborde, C. (1997). Affronter la complexité des situations d'apprentissage des mathématiques en classe. Défis et tentatives, *Revue Didaskalia*, n° 10, 97 – 112. Recuperado de <http://documents.irevues.inist.fr/handle/2042/23800>
- Mangiante-Orsola, C. & Perrin-Glorian, M. J. (2016). Ingenierie didactique de developpement en geometrie au cycle 3 dans le cadre du lea valenciennes-denain, *Actes du séminaire national de l'ARDM*, 35 – 59. Recuperado de <https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PS/IPS18013/IPS18013.pdf>
- Mangueira, M. M. C. (2022). *Engenharia didática: um processo de hibridização e hipercomplexificação de sequências lineares recursivas*. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará. Fortaleza. Recuperado de <https://ifce.edu.br/fortaleza/pgecm>
- Noronha, W. F. (2020). *Engenharia didática clássica sobre a sequência de pell e seus modelos de generalização*. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará. Fortaleza.
- Oliveira, R. R. (2018). *Engenharia Didática com o tema: relações bidimensionais, tridimensionais e n-dimensionais do modelo de Fibonacci* (dissertação de mestrado), Fortaleza: Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil.
- Oliveira, R. R.; & Alves, F. R. V. (2019). An investigation of the Bivariate Complex Fibonacci Polynomials supported in Didactic Engineering: an application of Theory of Didactics Situations (TSD). *Revista Acta Scientiae*, 21(2), 170-195.
- Perrin-Glorian, M. J. & Bellemain, P. M. (2016). L'ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maitres, *Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online*, 9(1), 45 – 82.
- Perrin-Glorian, M. J. (1993). *Aires de surfaces planes et nombres décimaux : questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème* (Thèse de doctorat d'État), Paris: Université Paris VII. Disponible em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01251423>
- Perrin-Glorian, M. J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In Margolinas C. et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Perrin-Glorian, M. J. (2019). A l'interface entre recherche et enseignement, les ingénieries didactiques, *1er Congrès international de la Théorie de l'Action Conjointe en Didactique*, 1 – 13.
- Shannon, A.G., Anderson, P.G. & Horadam, A.F. (2006). Properties of Cordonnier, Perrin and Van der Laan Numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(7), 825-831.
- Singh, P. (1985). The So-called Fibonacci Numbers in Ancient and Medieval India, *Historia Mathematica*, 12(1), 229 – 244.

- Sridharan, R.; Sridharan, R. & Srinivas, M. (2015). Nārāyaa's Generalisation of Mātrāvotta-prastāra and the Generalised Virahāka-Fibonacci Representation of Numbers, *Indian Journal of History of Science*, 50(2), 227 – 244.
- Stakov, A. (2009). *The Mathematics of Harmony: from Euclid to contemporary mathematics and computer science*, London: Word Scientific Press.
- Tempier, F. (2013). *La numération de'cimale de position a` l'école primaire. Une inge'nerie didactique pour le de'veloppement d'une ressource*. Universite' Paris Diderot, Thesis. <https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00921691/>
- Tempier, F. (2016). New perspectives for didactical engineering: an example for the development of a resource for teaching decimal number system, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(2 – 3), 261 – 276.
- Tempier F. (2012) Quelle ressource pour enseigner la numération décimale ? Présentation d'un travail en cours. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012 (GT6*, pp. 892–907). Disponible em: <http://emf.unige.ch/files/1214/5320/8534/EMF2012GT6TEMPIER.pdf>
- Tempier, F.; & Chambris, C. (2017). Concevoie une ressource pour l'enseignement de la numération décimale, *Recherche En Didactique des Mathématiques*, 37(2 – 3), 289 – 332.
- Vieira, R. P. M.; & Alves, F. R. V. (2019a). Sequences of Tridovan and their identities. *Notes on number theory and discrete mathematics*, 25(1), 185-197.
- Vieira, R. P. M.; Alves, F., R. V.; & Catarino, P. M. C. (2019). O estudo da Sequência de Padovan aplicado à Engenharia Didática: uma experiência no curso de Licenciatura em Matemática. *Indagatio Didactica*, 14(1), 260 – 279.
- Vieira, R. P. M; & Alves, F., R. V. (2019b). Propriedades das extensões da Sequência de Padovan. *Revista eletrônica paulista de matemática*, 15(1), 24-40.
- Vieira, R. P. M.; Alves, F., R. V.; & Catarino, P. M. C. (2020). Padovan sequence generalization – a study of matrix and generating function, *Notes in Number Theory and Discrete Mathematics*, 26(4), 1 – 12.
- Vieira, R. P. M. (2020). *Engenharia Didática (ED): o caso da Generalização e complexificação da sequência de Coordonier ou Padovan*. (dissertação de mestrado). Fortaleza: Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Estado do Ceará.