



SABERES NECESSÁRIOS PARA ENSINAR FRAÇÃO EM TEMPOS DE PEDAGOGIA INTUITIVA

KNOWLEDGE NECESSARY TO TEACH FRACTION IN TIMES OF INTUITIVE PEDAGOGY

Késia Ramires¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-1528-5136>

Denise Medina França²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1649-5816>

Edilene Simões Costa dos Santos³

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-0509-0098>

RESUMO

Este trabalho faz parte de uma pesquisa que vem investigando o ensino das frações em diferentes vagas pedagógicas. Especificamente, neste texto, discute-se como autores de manuais pedagógicos introduziram as frações em tempos da pedagogia intuitiva. Assim, durante a investigação, procurou-se responder às seguintes indagações: Em tempos de pedagogia intuitiva, como os manuais pedagógicos propunham a introdução do ensino de frações? Que prerrogativas os professores deveriam conhecer para ensinar/introduzir esse assunto matemático? Que contribuições este estudo pode fornecer ao campo científico da História da educação matemática e ao campo profissional da docência (de professores que ensinam matemática)? Para isso, foi adotado como procedimento metodológico as etapas sugeridas por Valente (2018a) e Burke (2016). A partir de uma perspectiva socio-histórica, adotamos as categorias *saberes a ensinar* e os *saberes para ensinar* (Hofstetter & Schneuwly, 2017), esses últimos considerados como saberes profissionais da docência. Os primeiros resultados apontam para uma movimentação dos autores dos manuais em direção à adoção do método intuitivo. A matemática a ensinar, da *relação entre as partes e a unidade* ou *relação entre as partes e o todo*, foi tratada por meio de ilustrações, ou em situações próximas ao cotidiano dos alunos, ou com uma noção prévia da divisão. Esta composição entre a matemática a ensinar e as ferramentas para o ensino, foi entendida como inerente ao conjunto dos *saberes para ensinar* fração. **Palavras-chave:** Saber profissional. Método intuitivo. Fração.

¹ Doutora em Educação para Ciência e Matemática (UEM). Professora da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Ponta Porã, MS, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Baltazar Saldanha, n. 610, ap. 16, Centro, Ponta Porã, MS, Brasil. CEP 79904-542. E-mail: kesiamir@hotmai.com

² Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo (USP). Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (PROPED- UERJ), Rio de Janeiro, RJ, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Li eu de Paula Machado, n. 104, ap. 302, Lagoa, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. CEP 22470040. E-mail: denisemedinafranca@gmail.com

³ Doutora em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade de Brasília (UnB). Professora e Coordenadora do Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campo Grande, MS, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Parapuã, n. 170, Jardim Jockey Club, Campo Grande, MS, Brasil. CEP: 79080-030. E-mail: edilenesc@gmail.com

ABSTRACT

This paper is part of a research that has been investigating the teaching of fractions in different pedagogical positions. Specifically, this text discusses how authors of pedagogical manuals introduced fractions in times of intuitive pedagogy. Thus, during the investigation, an attempt was made to answer the following questions: In times of intuitive pedagogy, how did pedagogical manuals propose the introduction of the teaching of fractions? What prerogatives should teachers know to teach/introduce this mathematical subject? What contributions can this study provide to the scientific field of the history of mathematics education and to the professional field of teaching (of teachers who teach mathematics)? For this, the steps suggested by Valente (2018a) and Burke (2016) were adopted as a methodological procedure. From a socio-historical perspective, we adopted the categories knowledge to teach and knowledge for teaching (Hofstetter & Schneuwly, 2017), the latter considered as professional knowledge in teaching. The first results point to a movement by the authors of the manuals towards the adoption of the intuitive method. The mathematics to be taught, the relationship between the parts and the unity or relationship between the parts and the whole, was treated through illustrations, or in situations close to the students' daily lives, or with a prior notion of division. This composition between the mathematics to be taught and the teaching tools was understood as inherent to the set of knowledge for teaching fractions.

Keywords: Professional knowledge. Intuitive method. Fraction.

Introdução

Este trabalho faz parte de um projeto⁴ mais abrangente que vem investigando os saberes para ensinar as frações em diferentes vagas pedagógicas⁵. Especificamente, neste texto, discute-se como autores de manuais pedagógicos⁶ introduziram a fração em tempos da *pedagogia intuitiva*, período este em que se difundia um novo método para o ensino. O método, denominado de *ensino pelo aspecto, lições de coisas* ou *intuitivo*, teve como precursor o educador suíço Johann Heinrich Pestalozzi⁷. Apropriado por outros professores e estudiosos, também se difundiu nos Estados Unidos, por meio de Norman Allison Calkins⁸ e, no Brasil, por meio de Rui Barbosa de Oliveira⁹.

Configurou-se como uma proposta reformista para a Europa, capaz de reverter a ineficiência do ensino escolar da época, qualificar melhor os indivíduos para o trabalho industrial e para compreender a organização social. Pretendia-se, com a implantação do novo método, um ensino concreto, racional e ativo, valorizando a observação e o trabalho. Pela observação, buscar-se-ia, com a criança, "progredir da percepção para a ideia, do concreto para o abstrato, dos sentidos para a inteligência, dos dados para o julgamento" (Valdemarin, 2014, p. 88). Pelo trabalho, os alunos realizariam "atividades concretas, similares àquelas da vida adulta" (ibid., p. 88). Sendo assim, o método intuitivo pressupunha direcionar o desenvolvimento da criança de modo que a observação gerasse o raciocínio e, o trabalho, preparasse o futuro produtor, tornando-se indissociáveis o pensar e o construir (ibid., p. 88).

Com essa concepção, o ensino daquela época foi ressignificado. Os saberes pedagógicos, emanados de uma então pedagogia intuitiva, articularam-se a outros mais

⁴ Pesquisa cadastrada junto a UFMS, intitulada *Uma caracterização da matemática a ensinar e para ensinar fração em diferentes vagas pedagógicas*, sob a coordenação da Profa. Dra. Edilene Simões Costa dos Santos.

⁵ De acordo com Glossário Ghemat-Brasil (2016, p. 18), a expressão *vaga pedagógica* é usada "como sinônimo de movimento, de fluxo, de transformação de um dado tempo por meio da propagação e ampla aceitação de doutrinas, ideais, filosofias pedagógicas, estas que são analisadas, sobretudo, pelos historiadores da educação resultando no estabelecimento de marcos cronológicos que identificam a prevalência da divulgação destes movimentos, carregados do espírito de transformação". Algumas denominações empregadas: vaga intuitiva, vaga escolanovista, etc. Relacionamos a vaga intuitiva à pedagogia intuitiva difundida por Pestalozzi.

⁶ "Por 'manual pedagógico' compreendem-se impressos como livros, compêndios, ou ainda um conjunto de textos reunidos, geralmente organizados por um autor, um grupo de pessoas ou uma instituição, como por exemplo, editora, escola ou instituto. Possui o objetivo de orientar e mediar a prática ou o ofício de ensinar em torno de um saber ou conjunto de saberes, como é o caso dos saberes elementares matemáticos (a aritmética, a geometria, o desenho e a álgebra)" (Ghemat-Brasil, 2016, p. 12).

⁷ Pestalozzi foi idealizador do método intuitivo. Conforme Oliveira (2017, p. 78), Pestalozzi "enxergava a atividade na educação como sendo uma das melhores ferramentas para que a criança pudesse mostrar toda a sua potencialidade" e, para isso, fundamentou-se na pedagogia da ação, ressaltando as experiências dos sentidos, experiências que poderiam aguçar a curiosidade das crianças.

⁸ Calkins foi um educador norte-americano que se apropriou do método intuitivo de Pestalozzi e escreveu alguns manuais para o ensino.

⁹ Rui Barbosa foi um expoente da educação brasileira. "Com a estima de Barbosa entre a classe política e de educadores da época, e também pelo conhecimento que detinha sobre os avanços educacionais de outros países" (Ramires, França, & Santos (2020, p. 2), conseguiu implementar ideias em nosso país, como o ensino intuitivo, pautado em Pestalozzi e Calkins.

específicos, como o das frações, da geometria, das medidas etc., provocando uma fusão entre saberes que se tornaram ferramentas para o ato de ensinar. Dessa fusão, saberes profissionais para a docência foram disseminados e circularam por meio de manuais pedagógicos (e outros documentos) e alcançaram diferentes níveis de ensino.

Nesse período, assim como em outros tempos, é possível dizer que os manuais faziam as vezes de um material preparatório para os alunos, bem como serviam de instrumento de trabalho dos professores. Era por meio deles que métodos, filosofias de ensino, assuntos a serem ensinados, recomendações e outras textualizações pautavam a prática dos formadores de professores, como também a prática dos professores que atuavam nas escolas.

Isto posto, reconhecemos os manuais pedagógicos como fontes privilegiadas para analisar concepções de ensino propagadas em períodos histórico-educacionais. Ademais, eles trazem informações que podemos filtrar, analisar e sistematizar, transformando-as em saberes após esse processo (Burke, 2016). Neste estudo, ao realizar as análises sobre esses documentos, nos permitimos passar por um processo de "cientifização" (ibid., p. 44). Sistematizamos, a partir dos manuais, indícios de saberes docentes visando apresentar aqueles que diziam respeito a como a fração deveria ser ensinada. Nessas sistematizações específicas, investigamos sobre os saberes profissionais: à luz das categorias teórico-metodológicas *saber a ensinar* e *saber para ensinar* (Hofstetter & Schneuwly, 2017) e a partir dos registros das fontes.

Essas categorias podem ser assim definidas: "saberes *para* ensinar (saberes profissionais que servem ao ensino, incluindo as didáticas), saberes *a* ensinar (conteúdos escolares e disciplinares)" (Hofstetter, 2017, p. 18 - grifos da autora). Tais saberes são, aqui, mobilizados como *teórico-metodológicos* por fazerem parte do estudo tanto a efeito de fundamentação do trabalho socio-histórico, como também são categorias que disparam a análise empreendida, norteadas as interrogações feitas às fontes e subsidiando os resultados, os quais serão tomados como indícios de tese.

Assim, aliada a uma análise documental, a historiografia que vimos compondo considera todos os processos da pesquisa, procurando compreender os movimentos de constituição dos saberes profissionais docentes, saberes a ensinar e saberes para ensinar. Porém, ao investigarmos saberes inerentes à profissão do ensino e da formação do professor que ensina matemática, consideramos uma hipótese¹⁰ mais específica, que existe uma

¹⁰ Consideramos a matemática a ensinar e a matemática para ensinar como hipótese porque partimos da suposição de que essas matemáticas foram se constituindo ao longo da história da profissão docente do professor que ensina matemática, elas existem. Contudo, há uma tese a provar, qual seja, apontar indícios desses saberes, dessas matemáticas, a partir das sistematizações que vimos apresentando em nossos artigos. Entendemos que o conjunto de resultados de diversas pesquisas,

matemática a ensinar e uma *matemática para ensinar* a cada momento histórico: a primeira, referindo-se ao objeto de trabalho do professor que ensina matemática e, a segunda, o conjunto de ferramentas que o professor deverá dispor sobre seu objeto de trabalho: a matemática a ensinar (Bertini, Morais, & Valente, 2017). Nosso objetivo, ao fim de vários estudos, é buscar *elementos didáticos e pedagógicos do saber profissional do professor que ensina matemática*, sendo, esse saber, uma articulação entre a matemática a ensinar e a matemática para ensinar.

De modo geral, se investigamos matemáticas que representam, respectivamente, o objeto e a ferramenta de trabalho do professor que ensina matemática, questões gerais norteiam nossas pesquisas: “Que saberes devem possuir os profissionais da docência?”; “Que matemática deve ser considerada na formação de professores dos primeiros anos escolares, tendo em vista a sua atuação profissional?”; “do ponto de vista de uma análise histórica, que transformações sofre a matemática, ao longo do tempo, presente na formação de professores que atua nos anos iniciais da escolaridade?” (Valente, 2018b, p. 50).

Assim, pontuadas as perguntas gerais, o período histórico, as fontes, as categorias teórico-metodológicas e a hipótese, cabe-nos destacar quais interrogações nos inquietam neste trabalho: Em tempos de pedagogia intuitiva, como os manuais pedagógicos apresentavam a introdução do ensino de frações? Que prerrogativas os professores deveriam conhecer para ensinar/introduzir esse assunto matemático? Mais a frente, essas questões serão melhor detalhadas quando analisados os manuais¹¹ de Antônio Bandeira Trajano, George August Büchler e Ramon Roca Dordal, autores que consideramos fazerem parte de uma transição pedagógica, do ensino tradicional para a pedagogia intuitiva.

2 Procedimentos metodológicos

No projeto mais abrangente, o qual mencionamos, tentamos compreender como informações sobre experiências docentes vão sendo transformadas em saberes ao longo da história da educação, ou seja, queremos compreender processos de transformação de conhecimentos, de experiências didático-pedagógicas de docentes para a sua sistematização e

considerando a mesma hipótese, mostrará a tese de que essas matemáticas são dadas por "tais e tais" saberes profissionais docentes.

¹¹ Os manuais que compõem este trabalho foram encontrados no Repositório Institucional da Universidade Federal de Santa Catarina, Banco de Dados *História da Educação Matemática*.

reconhecimento como um saber, um saber científico do campo pedagógico, um saber profissional da docência.

Primeiramente, para organização do projeto, o dividimos em períodos históricos a partir das propostas ou vagas pedagógicas, decompondo-o em: subprojeto *frações na pedagogia intuitiva*, subprojeto *frações na pedagogia científica* e subprojeto *frações na matemática moderna*. Em segundo lugar, para a sistematização do saber profissional sobre frações, supostamente ventilados em manuais pedagógicos em diferentes vagas pedagógicas, adotamos algumas etapas investigativas que serão seguidas nos subprojetos: (a) recompilação de experiências docentes; (b) análise comparativa dos conhecimentos dos docentes; (c) sistematização e uso dos conhecimentos como saberes (Valente, 2018a).

Considerando essas etapas, iniciamos os estudos da pesquisa mais abrangente com a recompilação de experiências docentes. Entendemos que essa recompilação consiste da elaboração de um inventário de obras pedagógicas que se dirigem ao professor com vistas a dar orientações para o ato de ensinar. Como, para este artigo, trazemos as orientações didático-pedagógicas para o ensino das frações em tempos de pedagogia intuitiva, então selecionamos diferentes manuais de autores que consideramos próximos ao método intuitivo.

Nos manuais pedagógicos, que têm por autoria professores, ex-professores, autoridades do ensino, encontram-se compiladas e organizadas experiências de trabalho docente, sob a forma de cursos, de aulas-modelo, de orientações relativas a uma programação de ensino, de maneiras de graduar exercícios, além de vários outros temas ligados à prática de ensino da aritmética escolar. (Valente, 2018a, p. 382)

Diante deste primeiro conjunto de informações extraídas dos manuais, referentes ao conceito de fração para os anos iniciais, em tempos do ensino intuitivo, dentro do subprojeto *frações na pedagogia intuitiva*, ainda tínhamos que aprofundar a temática, pois a coleta de dados se mostrava muito extensa. Dessa forma, delimitamos nossa investigação em subtemáticas sobre a fração e, aqui, priorizamos as maneiras que os manuais apresentavam a abordagem *inicial* desse conceito.

De posse dessa subtemática, retomamos nosso inventário anterior, agora levando em consideração as experiências sistematizadas pelos autores de manuais pedagógicos para o ensino de aritmética, em específico, de um saber para ensinar fração. Os indícios e a análise deste inventário são os elementos que integram este artigo. Em pesquisas futuras, pretendemos seguir para a segunda etapa do subprojeto *frações na pedagogia intuitiva*, a qual consiste na análise comparativa dos conhecimentos dos docentes que escreveram os manuais, buscando

estabelecer um consenso sobre como abordar o conceito de fração de modo intuitivo, procurando evidenciar aquilo que foi “decantado” ao longo do tempo.

Por fim, na última fase dos subprojetos realizaremos a sistematização e análise do uso dos conhecimentos como saberes. Essa terceira etapa envolve uma primeira organização, pelo pesquisador, dos resultados obtidos com o procedimento anterior. Perguntaremos: é possível estabelecer uma sistematização oriunda dos manuais pedagógicos em que identificamos consensos sobre o modo de orientar professores na tarefa pedagógica de ensinar fração, em acordo com a vaga intuitiva? Como se caracteriza a *matemática para ensinar fração intuitivamente*¹²? Portanto, estamos caminhando com os nossos procedimentos metodológicos, e tão logo pretendemos divulgar futuros resultados.

3 Anunciando nossos posicionamentos

A vertente da História da educação matemática a qual estamos filiadas, dentre muitos interesses, nesses últimos anos vem pesquisando, historicamente, como os saberes para o ensino e a formação de professores foram se transformando em saberes de referência para a docência do professor que ensina matemática, isto é, como esses saberes foram determinando uma *matemática a ensinar* e uma *matemática para ensinar* (Bertini, Morais & Valente, 2017). Por conseguinte, os estudos fixados nesta pauta passaram a focar nos saberes profissionais docentes.

Ainda, segundo Hofstetter e Schneuwly (2020), os grupos de pesquisa que se aprofundam na discussão dos saberes da docência podem perpassar algum, ou alguns posicionamentos, os quais vamos discutir nesta seção. É importante dizer que diferentes posicionamentos sobre as relações entre profissionalização e saber profissional determinam o "local de fala" dos saberes, ou melhor, determinam o local de discussão e constituição desses saberes. Portanto, conhecer esses posicionamentos pode nos situar enquanto grupo de pesquisa e orientar nossas discussões sobre os saberes profissionais dos professores que ensinam matemática, ou seja, sobre os saberes que temos denominado *matemática a ensinar* e *matemática para ensinar*.

¹² Perguntas similares deverão aparecer nos outros subprojetos que executaremos, exemplo: é possível estabelecer uma sistematização oriunda dos manuais pedagógicos em que identificamos consensos sobre o modo de orientar professores na tarefa pedagógica de ensinar fração, em acordo com a vaga escolanovista (em acordo à matemática moderna)?

Com raízes na perspectiva socio-histórica, tomando como referência os estudos de Hofstetter e Schneuwly (2017), e alinhadas à história cultural, conforme Chervel (1990) Chartier (1991) e De Certeau (1982), a *matemática a ensinar* e a *matemática para ensinar* são produtos de um processo científico, que demandou e ainda demanda pesquisas, diálogo entre grupos de pesquisadores, apropriação, reflexão, criatividade e síntese teórica. Atualmente, pressupor a existência de uma *matemática a ensinar* e uma *matemática para ensinar* é uma hipótese que fundamenta estudos históricos que buscam descortinar as matemáticas integrantes do processo de profissionalização docente de professores que ensinam matemática, como também evidencia a importância de se conhecer os saberes específicos para o campo profissional dos professores, ou, ainda, pensar sobre uma da *matemática do ensino* (Valente, 2020 - grifos nossos).

Em recente trabalho, Valente (2020) propõe uma *matemática do ensino* como saber produzido no âmbito das relações existentes entre formação e ensino. Essas relações envolvendo o campo disciplinar matemático, o campo disciplinar das ciências da educação e o campo profissional da docência em matemática, quando investigadas sob a perspectiva socio-histórica, podem indicar saberes profissionais da docência, tais como, a matemática a ensinar e a matemática para ensinar. Logo, a "matemática do ensino revela em cada época as articulações estabelecidas entre a matemática a ensinar e a matemática para ensinar" (ibid., p. 167). A partir disso, entendemos que os trabalhos que consideram a matemática a ensinar e a matemática para ensinar como categorias constituintes de uma matemática do ensino, acabam se lançando ao desafio de elaborar saberes que talvez, algum dia, possam se fazer saberes de uma *epistemologia da matemática do ensino*.

E essas matemáticas (historicamente construídas) podem ser fruto de estudos vinculados a algum dos posicionamentos elencados por Hofstetter e Schneuwly (2020)? Sim. Quando eles apontam sua tríade de posicionamentos de pesquisas, ajudam-nos a compreender de "onde falamos" e "porque consideramos" distintas matemáticas na história do ensino da matemática.

Em trabalho que vêm realizando, esses autores estabeleceram uma tipologia para a profissionalização docente. Dividiram essa tipologia em três posicionamentos. O primeiro, abrange uma discussão de autores que também levam em conta a perspectiva histórica; refere-se a publicações críticas sobre as reformas, sobre o sistema educacional (incluindo a ciência), sobre o contributo de sindicatos, de comissões estaduais, de poderes políticos e de pesquisadores que guiam os textos prescritivos. A crítica de Hofstetter e Schneuwly (2020) a este posicionamento se concentra na discussão entre liberdade ou controle sobre os professores,

uma vez que é possível que normativas, prescrições e outras formas de regulamentações, respaldadas na ciência (em campos disciplinares), possam restringir a autonomia docente quando impostas a esse núcleo profissional e, com isso, causar uma proletarização do trabalho docente.

O conjunto de autores que se enquadram ao posicionamento 1, debatem sobre os saberes produzidos pelos campos disciplinares que alicerçam a profissionalização docente, criticando a exacerbação da ciência como sendo a fonte de fornecimento dessa produção. Este posicionamento, na tríade tipológica, recebe a contextualização de: "saberes sobre o sistema escolar e a formação de professores: mecanismos de controle dos professores e dos alunos - governança da alma" (Hofstetter & Schneuwly, 2020, p. 23).

Sem excluir uma abordagem histórica ou empírica, o grupo de autores alocados por Hofstetter e Schneuwly no posicionamento 2, procura analisar fenômenos técnicos, científicos, pedagógicos, sociais, e outros, com vistas a prever a evolução futura da profissionalização docente. É um grupo também atento aos riscos de um processo de proletarização da profissão docente, contudo responsabilizam outros aspectos nesse processo, tais como: a "globalização, crescente complexidade, imperativos de eficiência dos sistemas" (Hofstetter & Schneuwly, 2020, p. 31). Parecem se aproximar do conjunto de autores do posicionamento 1, mas há motivações diferentes em suas pesquisas: uma delas, quando questionam sobre a natureza dos saberes a serem incluídos nos cursos de formação de professores ao invés da finalidade dos saberes incluídos - como fazem os autores do posicionamento 1; quando questionam o papel do campo disciplinar e da sua função na produção de saberes docentes ao invés de tomar o campo disciplinar como produtor unilateral de saberes.

Os autores alocados ao posicionamento 2, ao enxergarem o campo disciplinar sob outra lupa, o colocam como parceiro do campo profissional - vez que reconhece a importância de ambos na produção de saberes. Entendem que os saberes produzidos pelos campos disciplinares, nas universidades, provém de informações coletadas de práticas de ensino realizadas nas escolas, pelos professores em atuação, informações essas que são transformadas em saberes, dispostos, conseqüentemente, aos cursos de formação de professores. O campo profissional, por sua vez, alimenta-se-ia dessa devolutiva, do processamento de saberes "universitarizados", das trocas entre professores em atuação com professores em formação. Uma retroalimentação de ambos os campos, teoria e prática se retroalimentando. Desse modo, essa produção de saberes deriva da práxis pedagógica, denominado esse tipo 2 de: "por uma verdadeira profissionalização: uma universitarização da formação e dos saberes mobilizáveis pela ação" (ibid., p. 23).

Em outro espectro, foram posicionados os autores do tipo 3, o qual, nós autoras, acreditamos nos aproximar. Nesse enquadramento, Hofstetter e Schneuwly colocam aqueles pesquisadores que "retratam, do ponto de vista da história e da sociologia das ciências, a evolução do campo disciplinar das ciências da educação em conexão com o da formação de professores" (ibid., p. 38), isto é, aquelas pesquisas que examinam as relações entre o campo disciplinar e o campo profissional e interrogam: como e por que o processo de profissionalização dos professores se articula ao das transformações dos saberes em educação? Que relações existem entre o processo de profissionalização docente e o da disciplinarização das ciências da educação (Hofstetter & Schneuwly, 2020)?

Nessa lógica do tipo 3, entendemos que o campo profissional da profissão docente e o campo disciplinar das ciências da educação são reconhecidos como objetos históricos, os quais estiveram em articulação e promoveram constantes transformações no processo de profissionalização docente. Dessas articulações e transformações, fica subentendido que registros foram produzidos, direcionamentos (políticos, culturais, econômicos, sociais, pedagógicos) marcaram épocas, personagens se destacaram, profissionais participaram e deixaram suas contribuições (tanto profissionais do campo da docência, como os do campo disciplinar das ciências da educação), isto é, ainda que o campo disciplinar tenha produzido saberes de referência para a docência, não estiveram isentos das contribuições do campo profissional. Logo, os saberes produzidos pelos autores do posicionamento 3 devem ter em conta essa estreita relação entre os campos aqui citados.

Dessa forma, o que investigar ao reconhecer a profissionalização docente como resultado desses objetos históricos, campos em articulação? Nesse momento, é oportuno retomar que podemos investigar a *matemática a ensinar* e a *matemática para ensinar* como um dos resultados dessa articulação na qual nos reportamos. Dito de outro modo, ao assumir a profissionalização docente como um constructo histórico, podemos sugerir categorias integrantes desse constructo, como o caso da *matemática a ensinar* e a *matemática para ensinar*. Sendo, essas, basilares da *matemática do ensino* (Valente, 2020), podemos dizer que a profissionalização docente do professor que ensina matemática abrange a matemática do ensino.

Portanto, quando afirmamos que nossos estudos investigam, historicamente, a matemática presente no ensino e na formação de professores por meio de manuais pedagógicos, livros didáticos, revistas, entre tantos outros documentos, contribuímos com a constituição da *matemática do ensino*, com o campo de saberes de referência da docência do professor que

ensina matemática. A seguir, discutiremos e apontaremos alguns elementos dessa nossa contribuição quanto ao ensino das frações em tempos da pedagogia intuitiva.

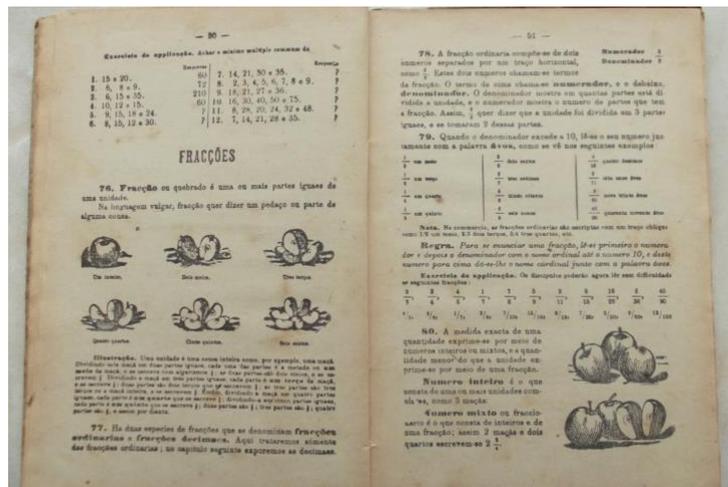
4 O que dizem os manuais?

A partir das categorias teórico-metodológicas elencadas *saberes a ensinar* e *saberes para ensinar* matemática, analisamos alguns manuais a fim de identificar a abordagem inicial dos autores em relação ao ensino de frações. Para nos auxiliar na interpretação desses materiais, propusemos algumas questões: Há indícios de como o professor era orientado a começar o ensino de frações? Como iniciar? Por uma definição? Por um problema? Por um exemplo? Como desenvolve a explicação didático-pedagógica sobre o ensino de frações? O ensino acontece do simples para o complexo? O que está implícito no texto didático sobre os saberes prévios necessários para o ensino de fração?

As primeiras obras analisadas foram escritas por Antônio Bandeira Trajano, intituladas: a trilogia *Arithmetica Progressiva* (1954, 84^a ed.), *Arithmetica Ilustrada* (1936, 109^a ed.) e *Arithmetica Primária* (1895, 12^a ed.). Corroboramos com Souza (2010) e Oliveira (2013), quando afirmamos que os livros dessa trilogia também tinham a finalidade de modernizar o ensino de Aritmética das escolas públicas e privadas do país, desde final do século XIX até meados do século XX.

Nos três manuais, o conceito de frações é abordado da mesma forma, definindo fração ou quebrados como: “é uma parte ou mais partes iguais de uma unidade”. Percebemos que o autor utilizou gravuras para atender aos preceitos do método intuitivo. Apresentou ilustrações representando objetos do cotidiano da criança, buscando oferecer dados sensíveis à percepção e à observação dos alunos por meio das ilustrações, contribuindo para motivar os alunos no percurso do que se sabe para o que se ignora, como se pode observar na Figura 1. De acordo com os princípios do método, seria mais fácil ver e responder do que ouvir e copiar.

Figura 1 – Introdução de Frações



Fonte: Trajano (1936, pp. 90-91)

Os conteúdos de fração, como todos, foram dispostos de forma lógica, com necessidade de pré-requisitos para passar para o próximo. Assim, Trajano deu início ao estudo dos números naturais, operações, propriedades dos números, frações ordinárias e decimais. Números decimais eram abordados antes da introdução do sistema métrico, em conformidade com as leis de ensino da época.

O caminho da abordagem consistia em: definições, regras, definições, exercícios resolvidos e, por fim, exercícios propostos. O autor utilizou como estratégia de ensino as regras para facilitar a resolução. É possível identificar preocupação com os alunos quando se observa, em toda a obra analisada, as “notas” e as “soluções” como um “passo a passo” para o entendimento do conteúdo.

Para o desenvolvimento inicial do assunto de fração, indicou o uso de ilustrações para mobilizar a ideia das partes de uma unidade dividida igualmente, fixando o conceito de fração como parte de um inteiro. Dessa forma, com as ilustrações de um inteiro, dois meios, três terços, quatro quartos, cinco quintos e seis sextos, definiu conceitos como meios, terços, quartos, quintos e sextos.

O autor organizou o conteúdo de frações do simples para o complexo, ou seja, partindo de conteúdos simples. Em um diálogo com o leitor, foi introduzindo, concomitantemente, a nomenclatura e a noção de quantas partes formam um inteiro: "Dividindo esta massa em duas partes iguais, cada uma das partes é a metade da outra, ou um meio da maçã, e se escreve com algarismos $1/2$ " (Trajano, 1879, p. 50). Faz o mesmo para terços, quartos, quintos e sextos.

Foi observado a existência de dois tipos de frações, ordinárias e decimais, porém, Trajano explicou ao leitor que primeiramente trataria das ordinárias. Posteriormente, definiu as regras para frações impróprias e próprias. Com esta sequência, podemos considerar que ele

organizou os conteúdos de frações de forma lógica e gradual: de operações elementares seguia para frações e operações, números decimais e, a partir daí, seguia com as grandezas e medidas, acompanhado do estudo de razão e proporção, passando por juros e porcentagens.

Selecionamos também uma coleção de manuais de August Büchler (1884 - 1962), intitulados *Arithmetica Elementar* (volumes 1, 2 e 3), de 1921 e 1942, por considerá-lo mais um difusor das ideias intuitivas no Brasil (Dybnikov, 2016). De acordo com Dybnikov (2016), Büchler reforçou no prefácio de seus livros, ao dialogar com o leitor, orientações metodológicas trazendo uma súpula de ideias do método intuitivo: transição da vida familiar para a vida escolar; aproveitamento dos conhecimentos pré-escolares, exibição real dos objetos em vez de apresentação de teoria dos números, reprodução de regras abstratas ou memorização; colocação de bases seguras para o conhecimento prático; o espírito infantil só é capaz de noções concretas pela intuição direta. O autor destacou suas propostas para uso do método intuitivo, indicando, sempre que possível, a leitura do livro *Primeiras Lições de Coisas* (1886), escrito por Calkins e traduzido por Rui Barbosa.

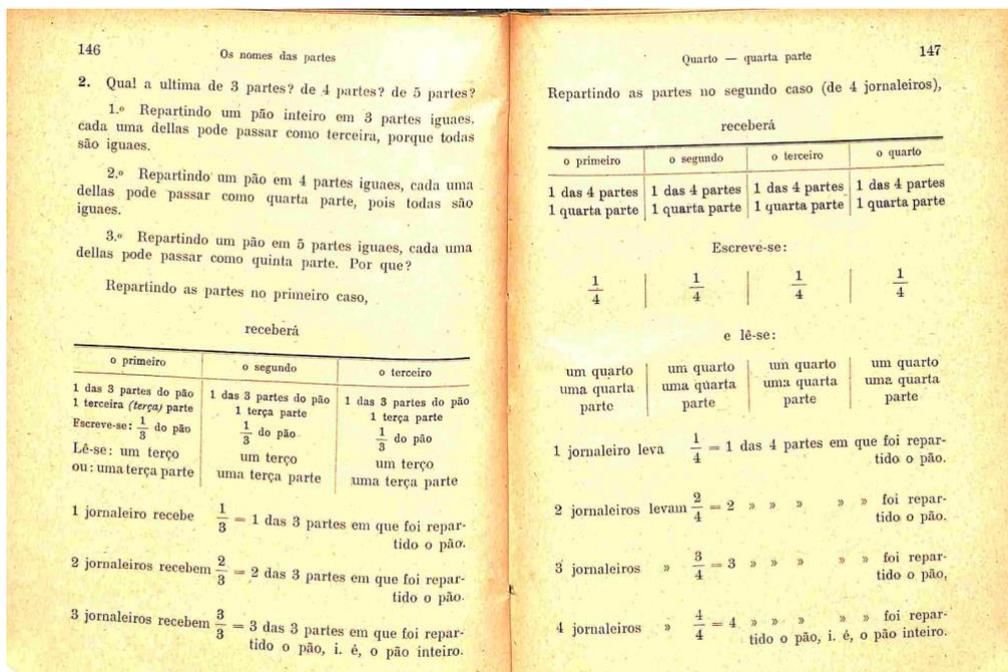
Em seus manuais, Büchler introduziu conceitos a partir da vivência cotidiana. Criava uma família imaginária de onde retirava situações e problemas a serem discutidos com e pelas crianças, na escola. Outro diferencial do autor foram as recomendações aos professores sobre a necessidade de interação com o mundo da criança: partir das “coisas”, objetos do mundo real, de coisas conhecidas, pelas quais a criança por meio da intuição sensível poderia alicerçar seus conhecimentos.

Utilizando-se de figuras que remetiam o contexto familiar, principalmente de alimentos comuns à época, Büchler introduziu os assuntos relacionados às frações. Imagens foram colocadas em todas as lições e, os alunos, estimulados por meio de problemas, podiam produzir seus próprios desenhos. Essas imagens também foram utilizadas para complementar o conceito de fração abordado nos problemas.

No segundo volume da coleção, após as unidades de medidas ordinárias - de tempo - e da numeração romana, o autor iniciou o estudo da fração sem citar esse nome. Primeiro, retomou a ideia de divisão, como um pré-requisito para abordar, intuitivamente, a noção sobre fração. Assim exemplificou: dividir o pão em 3 partes iguais, entre 3 pessoas, dividir o pão em quatro partes e distribuir entre três pessoas, etc. Após, problematizou situações explorando a divisão de um inteiro em diferentes quantidades de partes, distribuindo-as entre diferentes quantidades de pessoas. Com isso, convidava o leitor a organizar os dados discutidos em uma tabela.

O caminho era sempre do simples para o complexo, do que se sabia ao desconhecido, ou seja, ao mesmo tempo que ele buscava avançar da ideia de divisão para a ideia de fração, também usava de recursos didáticos familiares às crianças (como figuras de pão) para se chegar às tabelas e às nomenclaturas.

Figura 2 – Pré-requisito para ensinar Frações



Fonte: Büchler (1921, pp. 146-147)

Com a tabela, Büchler parecia chamar atenção à nomenclatura e à escrita de terços e quartos. Logo em seguida, vinha o conceito de metade. Depois disso, ainda sem usar o termo "fração", apresentou a divisão entre inteiros em que se obtém restos e, somente na seção seguinte, tratou do termo fração relacionado às partes que o resto foi dividido. Exemplo: ao dividir 5 laranjas em 3 pessoas, as 2 laranjas que restaram ainda poderiam ser divididas em partes iguais, ou frações iguais ($\frac{2}{3}$ para cada criança). Por sua vez, cada criança receberia 1 laranja mais $\frac{2}{3}$ das laranjas restantes, isto é, $1 + \frac{2}{3}$ (Büchler, 1921). Ao que tudo indica, essa exemplificação de Büchler tentou mostrar uma relação entre o *processo de divisão requisitado no problema* e as *frações ou partes que podem derivar da divisão do resto*. Além disso, é com uma breve explicação desse problema que ele abordou a soma entre número inteiro e fração, indicando a introdução de números mistos, bem como já inseriu, de certa forma, a operação de adição nessa ocasião.

Diante disso, podemos dizer que ele utilizou de uma abordagem prática, com exercícios e problemas “da vida prática”, principalmente do contexto familiar, situações que faziam o aluno agir para aprender. Era uma sequência de apresentação iniciada por meio de problemas a serem respondidos a partir da compreensão dos enunciados e exame das gravuras, passando-se para exercícios sobre as noções aprendidas envolvendo diferentes combinações.

Assim a lição dos primeiros passos de frações esteve organizada, de tal forma que o professor poderia partir dos enunciados dos problemas e propor perguntas que iriam em direção à descoberta dos conceitos. Pela sugestão de diálogo com o aluno, o autor propõe atividades para conduzir as crianças à solução desejada, lembrando, ao professor, de analisar também as gravuras dos problemas. Dessa forma, o ensino priorizado por Büchler estimulava a decomposição das ilustrações para dialogar com o problema proposto e responder às questões.

Da última obra que analisamos, não observamos a ilustração de figuras, embora haja problemas citando elementos conhecidos das crianças, como pães, queijos, etc.. A obra se refere ao manual *Aritmética Escolar: Livro do Mestre*, do autor Ramon Roca Dordal, datada de 1915. O livro consiste em um compilado de 6 cadernos de lições de aritmética escritas por ele, onde constam orientações para os professores, com teoria, exercícios e problemas. Por ser uma compilação importante dos cadernos escritos pelo autor, compôs nosso inventário.

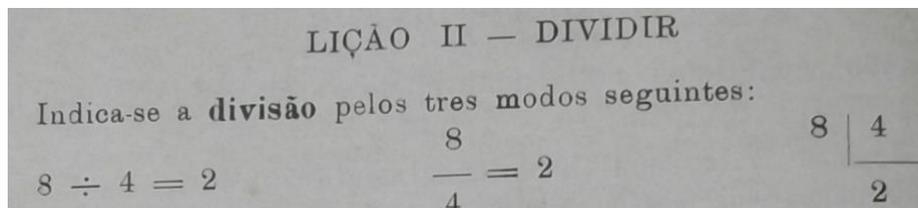
Corroboramos com Trindade (2018), Costa (2016) e Guimarães et al. (2020), que também analisaram os manuais de Dordal e afirmaram que na passagem do século XIX para o século XX, muitos autores de manuais utilizaram de um caráter prático com estreitas ligações com o cotidiano do aluno.

No Livro do Mestre, percebemos que o autor orienta uma distribuição e organização gradual de dificuldade, ou seja, os temas vão aparecendo de forma repetida e tendendo a um nível cada vez mais complexo - no avançar das lições, o nível de aprofundamento vai se tornando maior. Os assuntos sobre numeração, soma, subtração, multiplicação, divisão, números romanos, decimais, sistema métrico, moeda brasileira, medidas de tempo, de papel e da circunferência, frações, divisibilidade, operações com frações, são distribuídos ao longo do manual.

Um ponto a destacar em relação à opção de Dordal, quanto à fração, está posto no tema de divisão, Lição II (referente ao 3o. caderno escrito por ele), página 62 do Livro do Mestre. Foi apresentado pelo autor três representações para simbolizar a divisão, sendo uma delas a fracionária, Figura 3. Nessa ocasião, ele ilustrou a fração apenas de maneira intuitiva, como uma divisão, sem mencionar qualquer explicação do termo. Na página 63, por exemplo, intercalou o uso das representações, aproximando um problema e um exercício em que ambos

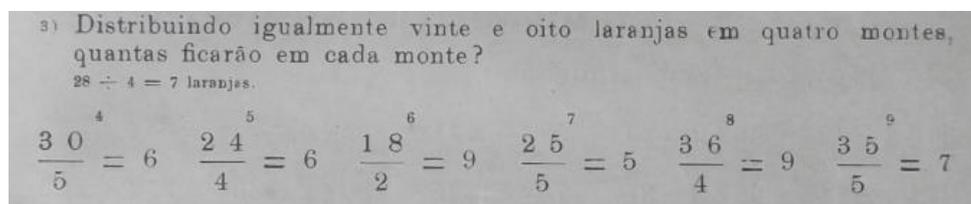
envolviam a divisão, induzindo à manipulação de representações diferentes com mesmo significado - problema 3 e exercícios de 4 a 9, Figura 4.

Figura 3 – Ensinando a divisão entre números inteiros



Fonte: Dordal (1915, p. 62)

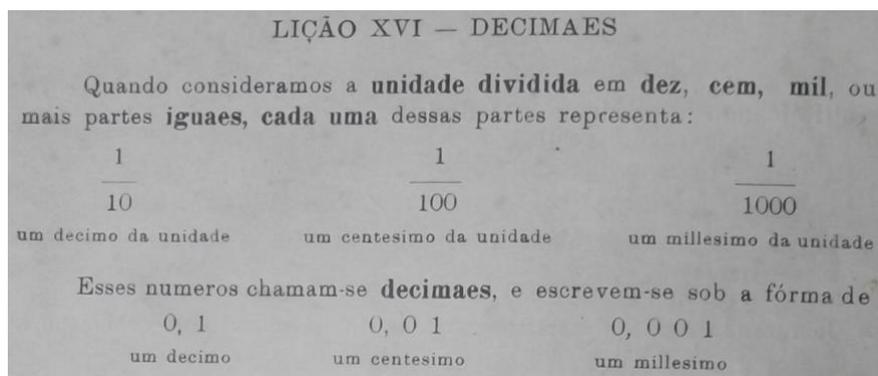
Figura 4 – Ensinando a divisão entre números inteiros



Fonte: Dordal (1915, p. 63)

Em meio ao tema de *Dividir*, alguns exercícios foram colocados por Dordal para que os alunos se habituassem com as distintas representações. Páginas a frente, compondo a Lição dos *Decimais*, a forma fracionária foi requerida para ilustrar a divisão que levaria aos decimais com vírgula, como na Figura 5.

Figura 5 – Lição sobre os decimais



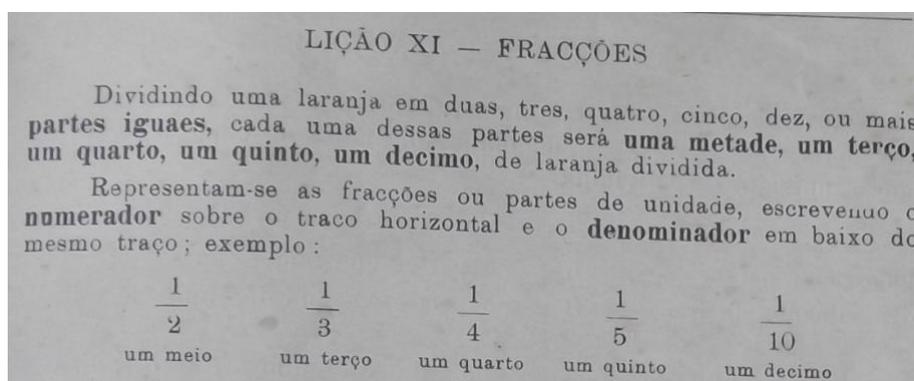
Fonte: Dordal (1915, p. 76)

Desse modo, é possível supor que a representação fracionária foi se tornando familiar às crianças mesmo sem o autor definir ou comentar sobre o que era uma fração. Os exercícios

apresentados em páginas posteriores, mencionam 0,75 como sendo três quartos, 0,25 como sendo um quarto, e denominações fracionárias junto à matéria de sistema métrico decimal ou monetário, trazendo a escrita por extenso das frações. De certa forma, isso nos pareceu um modo de tratar os pré-requisitos da fração, como a operação de divisão e a divisão por décimos, um modo de trazer a ideia intuitiva da fração.

Depois dessa ideia intuitiva, na Lição XI (referente ao 5o. caderno escrito por Dordal), intitulada *Fracções*, o assunto de fato será tratado, isto ocorrendo na página 131 do Livro do Mestre. Nesse momento, Dordal recomendou diferentes divisões de uma laranja e, assim como os outros autores, também citou objetos conhecidos dos alunos para facilitar a abordagem do conceito de fração. Basicamente, as ideias preliminares se referiam à relação entre as partes e a unidade, ou como conhecemos hoje, partes de unidade, ou parte-todo. Ao definir uma fração como parte de unidade, foi anunciando os termos numerador e denominador - Figura 6 - apontando uma escrita resumida do conceito e desses termos da fração. Segundo ele, as lições deveriam se apresentar de maneira clara e objetiva, com linguajar simples para as crianças, menos dispendioso para o professor ensinar e para o aluno assimilar.

Figura 6 – Introdução das frações



Fonte: Dordal (1915, p. 131)

Portanto, ao analisarmos a obra de Dordal, Livro do Mestre, pudemos perceber que a explicação didático-pedagógica do autor, referente às frações, lançou a representação fracionária no manual como forma de ilustrar a ideia intuitiva da fração, familiarizando as crianças à simbologia número-traço-número. Como o autor foi direcionando os assuntos a serem ensinados de maneira cada vez mais complexa, presumimos que assim ele o fez também com as frações, partindo de noções intuitivas para se chegar ao conceito e às respectivas propriedades do assunto. Ele recomendou, por exemplo, que para os professores encetarem o estudo das frações, convinha que os alunos resolvessem "mentalmente muitas operações

pequenas, com o fim de se habituarem a raciocinar a respeito das frações, do mesmo modo que nos inteiros" (Dordal, 1915, p. 131).

Considerações finais

Considerando as questões que pautaram nossa investigação, podemos inferir que os manuais analisados apontam para autores que trataram do método intuitivo segundo algumas especificidades. Trajano e Büchler optaram pela abordagem com ilustrações, instigando a observação das crianças de situações e objetos a serem divididos em partes iguais, visando a apropriação das crianças, sobre o conceito de fração, pela via dos sentidos. Por sua vez, Dordal não fez uso de ilustrações, mas, como os outros dois, utilizou-se de problemas envolvendo situações do cotidiano.

Trajano iniciou, por meio de gravuras, a divisão de um todo em duas partes iguais, tomando uma metade do inteiro. Em seguida, ainda com as figuras, explicitou o que eram os terços, os quartos, os quintos e os sextos. Por outro lado, Büchler introduziu a ideia de fração com uma situação familiar às crianças, dividindo um pão em três partes, para três jornalheiros. Problematizou a divisão de um inteiro em uma situação significativa para a criança, considerando a divisão em partes, primeiro terços, quartos e, depois, meios. Uniu *situação cotidiana e ilustrações* como meio para introduzir a fração, as partes da unidade.

Dordal, como discutimos, trouxe em seu Livro, primeiramente, a manipulação com a representação fracionária. No entanto, posteriormente, ao introduzir o conceito de fração propriamente dito, também ilustrou um enunciado de divisão de laranja em duas, três, quartos, e demais divisões, acarretando em meios, terços, quartos etc. Sem recorrer às gravuras, enunciou as frações de maneira mais resumida que os outros dois autores. De acordo com os comentadores da época, do manual de Dordal, a escrita resumida mostrada no Livro do Mestre tinha como finalidade evitar a fadiga e o dispêndio de tempo que os compêndios exigiam dos alunos, bem como facilitaria o ato de ensinar do professor.

Em relação à abordagem dos conteúdos, os três autores tinham em comum o desenvolvimento da matéria do simples para o complexo, em que o ensino iniciava de situações conhecidas e familiares aos alunos, ou de um aspecto intuitivo, caminhando para o nível mais complexo, com definições, regras e propriedades das frações. A exemplo, Dordal teve a preferência de trazer em seu manual a representação fracionária relacionada à divisão,

buscando apresentar uma noção intuitiva da fração. Posto isso, ao chegar na definição da fração como divisão de coisas em partes iguais, a ideia já teria sido assim trabalhada pelos professores em Lições anteriores.

Assim, da análise dos manuais, foi observada uma movimentação dos autores daquele tempo em direção à adoção do método intuitivo. A matemática a ensinar, entendida como a *relação entre as partes e a unidade*, ou *relação entre as partes e o todo*, poderia ser tratada com ilustrações, ou situações próximas ao cotidiano dos alunos, ou relacionado ao estudo prévio da divisão. Este saber a ensinar estaria articulado aos saberes sobre a manipulação de objetos do convívio dos alunos, dividir laranjas, pães, etc.. Também estaria articulado ao modo de ensinar do simples ao complexo, isto é, dos exemplos mais compreensíveis para os alunos para seguir depois às regras, definições e propriedades. Estes últimos saberes, da manipulação de objetos e dos sentidos dos alunos mais os saberes sobre o caminho do simples ao complexo, compuseram o conjunto dos saberes para ensinar fração; são elementos da história dos saberes profissionais docentes, inerentes à matemática do ensino.

Como havíamos anunciado, há necessidade de aprofundamento dos estudos em manuais desse período. Tendo em conta que a produção de saberes profissionais docentes não está dada, ela demanda de um processo de sistematização do pesquisador na análise em diferentes fontes. Desse modo, nossa investigação não se encerra aqui, é preciso realizar ainda uma análise comparativa e, assim, alcançar a sistematização e análise do uso dos conhecimentos como saberes, ou seja, uma sistematização que aponte elementos da matemática para ensinar fração.

Referências

- Bertini, L. F., Morais, R. S., & Valente, W. R. (2017). *A Matemática a ensinar e a Matemática para ensinar: novos estudos sobre a formação de professores* (1ª ed). Editora Livraria da Física.
- Büchler, G. A. (1942). *Arithmetica Elementar* (4ª ed., Vol. 1). Melhoramentos. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/173152> . Acesso em: 07 abr. 2020.
- Büchler, G. A. (1921). *Arithmetica Elementar*. (3ª ed., Vol. 2). Melhoramentos. Disponível em: <http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/7075>. Acesso em: 07 abr. 2020.
- Büchler, G. A. (1921). *Arithmetica Elementar*. (2ª ed., Vol. 3). Melhoramentos. Disponível em: <http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/7077>. Acesso em: 07 abr. 2020.
- Burke, P. (2016). *O que é história do conhecimento?* Editora UNESP.

- Chartier, R. (1991). O mundo como representação. *Revista de Estudos Avançados*, 11(5), 173-191. Disponível em: <https://www.revistas.usp.br/eav/article/view/8601/10152>. Acesso em: 15 mar. 2021.
- Chervel, A. (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & Educação*, 2, 177-229. Disponível em: <https://docero.com.br/doc/nsvxc51>. Acesso em: 10 mar. 2021.
- Costa, D. A. (2016). A Aritmética Escolar (Livro do Mestre) de Roca Dordal no ensino primário em Santa Catarina na primeira metade do século XX. *Perspectiva*, 34(1), 85-101. <http://www.perspectiva.ufsc.br>
- De Certeau, M. (1982). A operação historiográfica. In Michel de Certeau. *A escrita da história* (pp. 56-104) Forense Universitária.
- Dordal, R. R. (1915) *Arithmetica Escolar*: exercícios e problemas para escolas primárias, famílias e colégios. (Livro do Mestre). São Paulo: Livraria Francisco Alves.
- Dynnikov, C. M. S. S. (2016) Representações de aritmética no livro de Georg Büchler. *Revista de História da Educação Matemática*, 2(1), 96-116. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/177617>. Acesso em: 07 abr. 2020.
- Guimarães, M. D., Silva, M. R. I. S., & França, D. M. (2020). Que aritmética para ensinar sistema métrico decimal? Saberes profissionais para o seu ensino. *Educação em Questão*, 58, 1-22. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/218969>. Acesso em: 07 abr. 2021.
- Glossário Ghemat-Brasil. (2016). Repositório Institucional da Universidade Federal de Santa Catarina. *Banco de Dados História da Educação Matemática*. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/158952/GLOSSA%cc%81RIO%20VERSA%cc%83O%201.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 05 mai. 2021.
- Hofstetter, R. (2017). Apresentação. In R. Hofstetter & W. R. Valente (Org.). *Saberes em (trans) formação: tema central da formação de professores* (pp. 15-19, 1a ed.). Editora da Física.
- Hofstetter, R., & Schneuwly, B. (2017). Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação. In R. Hofstetter & W. R. Valente (Org.). *Saberes em (trans) formação: tema central da formação de professores* (pp. 113-172, 1a ed.). Editora da Física.
- Hofstetter, R., & Schneuwly, B. (2020). "Profissionalização" e formação de professores: uma tipologia dos saberes de referência para a docência. In W. R. Valente (Org.) *Ciências da educação, campos disciplinares e profissionalização: saberes em debate para a formação de professores* (pp. 17-60, 1a ed.) Livraria da Física.
- Oliveira, M. A. (2013). *Antônio Bandeira Trajano e o método intuitivo para o ensino de Arithmetica (1879-1954)*. [Dissertação de Mestrado, Universidade Tiradentes].

- Oliveira, M. A. (2017). *A Aritmética Escolar e o Método Intuitivo: Um Novo Saber para o Curso Primário (1870 – 1920)*. [Tese de Doutorado, Universidade Federal de São Paulo].
- Ramires, K., França, D. M., & Santos, E. S. C. Um "novo" olhar sobre as frações segundo o manual Primeira Lições de Coisas. *Anais do 5º Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática*. UFRN, evento on-line.
- Souza, T. L. L. (2010). *Elementos históricos da educação matemática no Amazonas: livros didáticos para ensino primário no período de 1870 a 1910*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.
- Trajano, A. B. (1895). *Aritmética Primária* (12ª ed). Cia. Typ. do Brazil.
- Trajano, A. B. (1936). *Aritmética Elementar Ilustrada: ensino teórico e prático* (109ª ed). Livraria Francisco Alves.
- Trajano, A. B. (1954). *Aritmetica Progressiva* (84ª ed). Livraria Francisco Alves.
- Trindade, D. A. (2018). *As Artes de Medir: saberes matemáticos no ensino primário de São Paulo, 1890-1950*. [Tese de Doutorado, Universidade Federal de São Paulo].
- Valdemarin, V. T. (2014). O Método Intuitivo: os Sentidos como Janelas e Portas. In Dermeval Saviani et al. *O Legado Educacional do Século XIX* (pp. 81-125). Autores Associados.
- Valente, W. R. (2018a). Processos de Investigação Histórica da Constituição do Saber Profissional do Professor que Ensina Matemática. *Acta Scientiae*, 20(3), 377-385, mai./jun. 2018.
- Valente, W. R. (2018b). O saber profissional do professor que ensina matemática: história da matemática a ensinar e da matemática para ensinar em construção. In B. A. Dassie & D. A. Costa (Orgs.) *História da educação matemática e formação de professores* (pp. 49-83). Editora Livraria da Física.
- Valente, W. R. (2020). História e cultura em educação matemática: a produção da matemática do ensino. *REMATEC*, [S. l.], 15(36), 164-174. Disponível em: <http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/307>. Acesso em: 14 abr. 2021.