

A ÁLGEBRA LINEAR NO BRASIL NA DÉCADA DE 1970: Um estudo estado em livros didáticos

Renan Marcelo da Costa Dias¹
Miguel Chaquiam²

RESUMO

Este trabalho teve por objetivo *caracterizar as apresentações e representações dos objetos (In)dependência linear, Geradores, Base e Dimensão num espaço vetorial constantes em três livros de álgebra linear da década de 70, nos quais Guilherme de La Penha figura como autor ou coautor*. A partir de Chaquiam (2012) foram destacados os livros *Álgebra Linear I e II* (1974), *Sinopse de Álgebra Linear* (1975) e *Introdução à Álgebra Linear* (1977). Buscou-se suporte na pesquisa documental com auxílio da Teoria da Análise do Conteúdo de Bardin (2016), que por sua vez possibilitou a criação das seguintes categorias de análise desses livros: (i) Introdução ao conteúdo; (ii) Definição do objeto matemático e (iii) Utilização de diferentes representações do objeto matemático. A partir das análises foi possível elencar características marcantes desses livros em relação aos objetos matemáticos considerados no questionamento inicial, dentre as quais, a utilização de ideias numéricas e de outros conceitos como suportes às definições dos objetos, assim como a preocupação com a manutenção do rigor do texto matemático. Além disso, foram identificados pelos menos três tipos de representações dos objetos matemáticos nos livros analisados: representação em linguagem natural, representação algébrica e representação geométrica. De modo geral, observou-se que os autores tinham a intenção de tornar o conteúdo de álgebra linear mais claro, de modo a contribuir para o entendimento desses objetos matemáticos de forma completa em diversos aspectos, dentre eles, o numérico, o algébrico e o geométrico, sem perder de vista a formalização e o rigor matemático.

Palavras-chave: Educação Matemática. História da Educação Matemática. Álgebra Linear.

ABSTRACT

This work aimed to *characterize the presentations and representations of the Linear (In)dependence objects, Generators, Base and Dimension in a vector space contained in three linear algebra books from the 70's, in which Guilherme de La Penha appears as an author or co-author*. From Chaquiam (2012), the books *Linear Algebra I and II* (1974), *Synopsis of Linear Algebra* (1975) and *Introduction to Linear Algebra* (1977) were highlighted. Support was sought in documentary research with the help of Bardin's Content Analysis Theory (2016), which in turn enabled the creation of the following categories of analysis of these books: (i) Introduction to the content; (ii) Definition of the mathematical object and (iii) Use of different representations of the mathematical object. From the analysis it was possible to list the outstanding characteristics of these books in relation to the mathematical objects considered in the initial questioning, among which, the use of numerical ideas and other concepts as supports to the definitions of the objects, as well as the concern with maintaining rigor of the mathematical text. In addition, at least three types of representations of mathematical objects were identified in the analyzed books: natural language representation, algebraic representation and geometric representation. In general, it was observed that the authors intended to make the linear algebra content clearer, in order to contribute to the understanding of these mathematical objects in a complete way in several aspects, among them, the numeric, the algebraic and the geometric, without losing sight of formalization and mathematical rigor.

Keywords: Mathematical Education. History of Mathematical Education. Linear Algebra.

¹ Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará – UFPA. E-mail: renanmarcelo1998@gmail.com

² Docente da Universidade do Estado do Pará – UEPA. E-mail: miguelchaquiam@gmail.com

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Apresenta-se um recorte dos resultados de uma pesquisa desenvolvida no âmbito do curso de licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA), que teve por objetivo: *Caracterizar as apresentações e representações dos objetos (In)dependência linear, Geradores, Base e Dimensão num espaço vetorial constantes em três livros de álgebra linear da década de 70, nos quais Guilherme de La Penha figura como autor ou coautor.* Contudo, em decorrência da exiguidade de espaço desta publicação, limitamo-nos a apresentar a análise de cada um dos objetos supracitados em apenas três dos sete livros mencionados abaixo.

O interesse pela temática surgiu a partir da experiência de um dos autores enquanto aluno e, posteriormente, monitor da disciplina álgebra linear, e do outro, na qualidade de professor desta disciplina, na qual foi possível observar que os alunos apresentavam dificuldades expressivas na compreensão de objetos considerados básicos para o avanço no estudo da álgebra linear, a saber, (In)dependência linear, Geradores, Base e Dimensão num espaço vetorial. Além disso, o trabalho de Chaquiam (2012) trouxe à tona os livros de Álgebra Linear, datados da década de 70, de autoria ou coautoria do cientista paraense Guilherme de La Penha.

Chaquiam (2012) relata que Guilherme de La Penha foi um cientista paraense que permeou por diversas áreas do conhecimento científico e é reconhecido por muitos diante de sua genialidade, cuja formação acadêmica perpassou pela engenharia mecânica na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), por dois mestrados, um na PUC-Rio e outro em Cambridge, na Inglaterra, e por doutoramento na Universidade de Houston, nos EUA. Durante sua carreira acadêmica e gestor público produziu diversos artigos e livros, além de assumir vários cargos relacionados ao sistema educacional brasileiro.

Dentre sua produção, estão os livros de álgebra linear, publicados de 1974 a 1977, escritos com base na sua experiência como coordenador e professor dessa disciplina e, também, noutras produções semelhantes anteriores. De acordo com Chaquiam (2012), o motivo da produção desses livros foi o desejo de dar um tratamento conceitual “moderno” ao assunto, modernidade expressa por meio das interações entre geometria, álgebra e

métodos numéricos, provavelmente, originado a partir das experiências que vivenciou no exterior em centros de excelência em matemática e física.

Nesse caminhar, tendo em vista os comentários de La Penha sobre a intenção de escrever um compêndio de álgebra linear que enfatizasse as representações algébricas e geométricas e as dificuldades observadas nos alunos em álgebra linear, levou-nos ao seguinte questionamento: *Como são apresentados e representados os objetos (In)dependência linear, Geradores, Base e Dimensão num espaço vetorial constantes em livros de álgebra linear da década de 70, nos quais Guilherme de La Penha figura como autor ou coautor?*

Ao nos debruçarmos sobre esses livros – concebidos como documentos, haja vista que se constituem como materiais escritos que podem ser usados como fonte de informação – deslumbramos a possibilidade de compreender as interações entre representações numéricas, algébricas e geométricas, uma vez que, de acordo com Cellard, o documento escrito representa

[...] uma fonte extremamente preciosa [...] é evidentemente insubstituível em qualquer reconstituição referente a um passado relativamente distante, pois não é raro que ele represente a quase totalidade dos vestígios da atividade humana em determinadas épocas. Além disso, muito frequentemente, ele permanece como único testemunho de atividades particulares ocorridas num passado recente.

(Cellard apud Kripka *et al.*, 2015, p. 58).

Nesse sentido, esse trabalho foi balizado pelas demarcações de uma pesquisa de carácter documental, uma vez que esta é definida como aquela na qual os dados oriundos de documentos possibilitam informações valiosas à compreensão de um determinado fenômeno, e ainda faz uso de métodos e técnicas variados para a apreensão, compreensão e análise de documentos (Kripka *et al.*, 2015). Dessa forma, almejamos, a partir do olhar sobre os livros elencados, identificar de que forma os objetos supracitados da álgebra linear são apresentados e representados nessas obras.

Tendo em vista questão norteadora, este estudo está assim dividido: No primeiro momento serão apresentados traços biográficos dos autores das obras definidas para essa apresentação, com destaque para os livros de álgebra linear, no intuito de elucidar os motivos que nos levaram a enveredar por esse caminho. Posteriormente, são expostos aspectos metodológicos relacionados ao desenvolvimento do trabalho, no qual se encontram o tipo de pesquisa, as categorias adotadas para análise dos livros e a justificativa

da escolha dos objetos matemáticos e dos livros de álgebra linear. Na sequência são despontadas as análises dos livros, bem como discussões em relação aos objetos matemáticos, selecionados em cada livro. Por fim, são traçadas considerações acerca das análises que nos permitiram responder à questão norteadora.

OS AUTORES GUILHERME DE LA PENHA E MINA CARAKUSHANSKY

Para Kripka *et al* (2015), em uma pesquisa documental se faz necessário que o pesquisador não limite seu olhar aos documentos por si só, mas também sobre tudo aquilo que envolve esse material, a saber, quem o produziu, sua finalidade, o público alvo e intencionalidade, afim de decifrar um caso específico de uma história de vida ou de um processo. Nesse sentido, esta seção tem por objetivo apresentar traços biográficos dos autores, Guilherme de La Penha e Mina Carakushansky, assim como de sua produção científica, em especial dos livros de álgebra linear, no intuito de elucidar ao leitor os motivos que nos levaram a estudá-los. Embora figure o nome do professor Hélio Siqueira Silveira no Quadro 01 como coautor do livro “Álgebra Vetorial e Geometria Analítica no Espaço”, limitamo-nos em não apresentá-lo neste trabalho, visto que os livros analisados são de autoria dos outros dois autores anunciados.

As informações referentes a Guilherme de La Penha foram obtidas no trabalho de Chaquiam (2012), “GUILHERME DE LA PENHA: Uma história de seu itinerário intelectual em três dimensões”, que tinha como foco central a historiografia brasileira da ciência, voltado especificamente para a vida e obra de um matemático-físico da contemporaneidade. Por outro lado, as dificuldades em obter informações para composição dos traços biográficos de Mina Seinfeld de Carakushansky podem ser constatadas nos dados apresentados. Iniciamos de forma mais extensiva com os traços biográficos de Guilherme de La Penha e, de modo mais singelo, seguimos com os de Mina Carakushansky.

Guilherme Maurício Souza Marcos de La Penha nasceu em Belém do Pará no dia 9 de março de 1942, cursou o ciclo primário no extinto Instituto Suíço Brasileiro entre os anos de 1949 e 1952. Posteriormente foi admitido no Colégio Marista Nossa Senhora de Nazaré, onde concluiu o 1º ciclo secundário no período de 1953 a 1956. Em 1959 concluiu o curso de Agrimensura pela Escola Técnica de Agrimensura do Pará, onde teve

experiência de ensino como instrutor, período que manteve correspondências com Elon Lages Lima sobre questões envolvendo análise matemática (Chaquiam, 2012)

No ano de 1960 La Penha ingressou no curso de Engenharia Mecânica na Universidade Federal do Pará (UFPA), no entanto, neste mesmo ano, solicitou transferência para a Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), vindo a concluí-lo em 1964. Durante a graduação, La Penha teve experiência como Instrutor da Escola Politécnica da PUC-Rio e também fez um curso de aperfeiçoamento em Matemática no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).

Entre os anos de 1964 a 1965, Guilherme de La Penha fez mestrado em Engenharia Mecânica na Escola da Pontifícia Universidade Católica (EPUC-Rio) na área de Mecânica aplicada, sendo o primeiro diploma de Mestre em Ciências outorgado por aquele programa e, mais, concluiu outro mestrado no ano de 1966, em Matemática Aplicada e Mecânica dos Sólidos pela Universidade de Cambridge, na Inglaterra. cursou doutorado na Universidade de Houston, EUA, no período de 1966 a 1968, na área de Matemática Aplicada e Mecânica dos Sólidos, onde obteve o título de Ph. D. e, na Universidade de Carnegie-Mellon, entre os anos de 1968 e 1969, realizou o pós-doutoramento em Matemática Aplicada (Chaquiam, 2012).

Em relação à atuação profissional de Guilherme de La Penha, iniciou suas atividades docentes na Escola Politécnica da Universidade Católica do Rio de Janeiro em 1962/1963 como professor Assistente de Matemática. Em 1964 assumiu as funções de professor auxiliar na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) até 1977, onde exerceu atividades de ensino, administração e pesquisa em setores como Escola Nacional de Engenharia, Instituto de Matemática e Coordenação dos Programas e Pesquisas em Engenharia (COPPE) (Chaquiam, 2012).

Entre os anos de 1977 e 1979 esteve na Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP), e de 1979 a 1980, na Secretaria de Ensino Superior do Ministério de Educação e Cultura (SESu/MEC). Enquanto Secretário do SESu/MEC, Guilherme de La Penha fez parte do Conselho Federal de Educação (CFE); foi Membro do Conselho Nacional de Pós-Graduação e Presidente do Grupo Técnico de Coordenação (GPC/CNPG); Membro do conselho plenário da Coordenação de Atividade de Processamento Eletrônico (CAPRE), como representante do Ministério da Educação e Cultura e Membro do Grupo Superior do Programa de Formação de Recursos Humanos para o Setor Nuclear (PRONUCLEAR) (Chaquiam, 2012).

No período de 1980 a 1982, Guilherme de La Penha assumiu a Vice-presidência do CNPq, na gestão de Lynaldo Cavalcanti de Albuquerque, entretanto, com a extinção do cargo, em 1983, La Penha foi nomeado Assistente Especial do CNPq para a Amazônia e passou a atuar no Museu Paraense Emílio Goeld (MPEG), onde tomou a frente da restauração da biblioteca dessa instituição e também da Biblioteca Pública Gaspar Vianna. Em 1984 retornou à Washington (EUA) na qualidade de Consultor do Banco Interamericano de Desenvolvimento (BID) e Assistente Especial do Departamento de Ciência e Tecnologia da Organização dos Estados Americanos (OEA) (Chaquiam, 2012).

Ao retornar à Belém em 1985, Guilherme de La Penha assumiu a direção do MPEG e da Secretaria de Cultura do Estado do Pará até 1987. Durante a direção do MPEG, La Penha investiu na expansão da infraestrutura física e das áreas de atuação do MPEG, iniciou a pós-graduação por meio de convênios, no qual garantiu pela primeira vez a formação de recursos humanos de alto nível na própria região Amazônica. Dessa forma, Guilherme de La Penha transformou o museu numa instituição capaz de realizar pesquisas, promover a inovação científica, formar recursos humanos, preservar acervos e comunicar conhecimentos nas áreas de ciências naturais e humanas relacionadas à Amazônia (Chaquiam, 2012).

De 1991 a 1994, Guilherme de La Penha assumiu a Secretária de Cultura do Pará e a Presidência da Fundação Cultural do Pará Tancredo Neves, informatizou esses dois órgãos, criou o Salão Paraense de Artes Plásticas, instalou o Museu do Estado do Pará e preparou o inventário de todos os bens artísticos e culturais de Belém. Em 1995, La Penha passou a atuar como Diretor de Programas Espaciais da Agência Espacial Brasileira até seu falecimento em fevereiro de 1996 (Chaquiam, 2012).

Mina Seinfeld de Carakushansky nasceu em 14 de setembro de 1944, em Dorohoi, Romênia. Professora e pesquisadora radicada no Brasil, formada em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), instituição na qual ingressou em 1975, com mestrado em Administração pela *California American University* nos Estados Unidos da América (EUA), também se graduou no curso de “Altos Estudos Estratégicos”, pela antiga Escola Superior de Guerra no Rio de Janeiro, possui publicações voltadas ao cálculo e álgebra linear, além de um extenso rol de trabalhos sobre questões relacionadas à prevenção e a políticas sobre drogas.

Ministrou aulas nos programas de graduação e de pós-graduação do Instituto de Matemática da UFRJ e, nesse período, também atuava como secretária-executiva do Grupo

Interdisciplinar de Estudos em Vitimologia da UFRJ. No final de 1991, a partir de contatos com Coronel Carlos Magno Nazareth Cerqueira, Comandante-Geral da Polícia Militar do Estado do Rio de Janeiro (PMERJ), ela é cedida pela IM-UFRJ e passou a atuar no PMERJ. Nesse período, em 1994, traduziu o livro “Policiamento Comunitário: como começar”.

As pesquisas revelaram que Mina Carakushansky enveredou por caminhos voltados as questões relacionadas à prevenção e a políticas sobre drogas. Dentre seus trabalhos, estão os livros “*Felicidade é uma Decisão!*” e “*Drogas - Proteja seu filho*”, publicados em 2007 e, em coautoria, os livros “*Drogas - el error de despenalizar - legalizar*”, de 2012, “*Drogas y Derechos Humanos*”, de 2013 e “*Drogas? Atenção!*”, de 2016. Recebeu numerosos distinções e prêmios, entre os quais o de Comendadora da Polícia Militar do Rio de Janeiro, a Medalha Euzébio da Costa da Guarda Municipal do Rio de Janeiro e a Medalha Pedro Ernesto, outorgada pela Câmara Municipal do Rio de Janeiro, em 2008. Entre as distinções internacionais estão os títulos de Visitante Ilustre de cidades da América Latina, o Prêmio em Excelência em Prevenção dado pela Rede Interamericana de Prevenção às Drogas (RIPRED).

Mina Carakushansky mora atualmente na cidade do Rio de Janeiro, é reconhecida como especialista dentro da temática “Cidades Preventivas”, preside Brasileiros Humanitários em Ação (BRAHA), é membro da diretoria da Drug Watch International, membro da diretoria do World Federation Against Drugs e assessora especial da International Task Force on Strategic Drug Policy e da Associação Brasileira de Álcool e Drogas (ABRAD).

No Quadro 01 constam sete produções científicas identificadas por Chaquiam (2012), nas quais constam conteúdos pertinentes à álgebra linear e Guilherme de La Penha figura como autor, entretanto, em quadro dessas obras ele compartilha a coautoria com Mina Seinfeld de Carakushansky ou Hélio Siqueira Silveira.

Quadro 1 – Publicações de Guilherme de La Penha em Álgebra Linear.

ANO	TÍTULO	AUTORES
1962	Álgebra Vetorial	Guilherme de La Penha
1964	Aplicação de Matrizes na Resolução de Sistemas de Equações Lineares	Guilherme de La Penha
1964	Álgebra Vetorial e Geometria Analítica no Espaço	Guilherme de La Penha e Hélio Siqueira Silveira
1974	Álgebra Linear I e II	Mina Seinfeld de Carakushansky e Guilherme de La Penha
1975	Sinopse de Álgebra Linear	Guilherme de La Penha
1976	Autovalores e Diagonalização	Guilherme de La Penha e Mina Seinfeld de Carakushansky
1977	Introdução à Álgebra Linear	Mina Seinfeld de Carakushansky e Guilherme de La Penha

Fonte: Elaborado pelos autores, 2020.

A partir de Chaquiam (2012) foi possível tecer considerações a respeito das produções elencadas no quadro acima. No livro *Álgebra Vetorial* são apresentadas noções axiomáticas de espaço vetorial ligado à representação geométrica usual e suas aplicações em trigonometria, geometria analítica e física. Essa obra tornou-se referência àqueles que pretendiam lograr êxito nos exames de admissão das escolas de engenharia, em especial a escola de engenharia da PUC, além disso, desmistificou a concepção de que o cálculo vetorial básico deveria ser trabalhado apenas no nível universitário.

Aplicação de Matrizes na Resolução de Sistemas de Equações Lineares é um artigo científico publicado na revista LVMINA SPARGERRE em 1964, onde é possível constatar que as “noções básicas de álgebra elementar das matrizes” vão além da simples manipulação algébrica, contemplam também a resolução de sistemas lineares, e mais, que o método apresentado havia se tornado uma tendência por dois motivos, possibilidade de generalização de resultados e uso da matemática computacional.

A obra intitulada *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica no Espaço*, de Guilherme de La Penha e Hélio Siqueira Silveira caracteriza-se muito mais como uma apostila que contém formulário manuscrito, destinada aos alunos da Escola Politécnica da Universidade Católica e da Escola de Engenharia da Universidade de Juiz de Fora, contendo fórmulas e tabelas essenciais para o estudo de álgebra vetorial e geometria analítica.

O livro *álgebra linear I e II*, publicado pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), é o primeiro da sequência de um compêndio de álgebra linear que seria produzido por Guilherme de La Penha. Esta obra abrange os principais objetos da álgebra

linear, os espaços vetoriais e transformações lineares, bem como objetos matemáticos contíguos a estes.

Em *Sinopse de Álgebra Linear* encontram-se notas das exposições feitas por Guilherme de La Penha ao ministrar o curso de álgebra linear aos estudantes do mestrado no Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia, da UFRJ (COPPE) e no Instituto de Matemática da UFRJ, entre os anos de 1970 e 1973. Esta obra contempla corpos e espaços vetoriais até formas canônicas de Jordan e, em seu apêndice, constam as operações algébricas e uma genealogia das estruturas algébricas.

Autovalores e Diagonalização é uma complementação ao livro *Introdução à Álgebra Linear*. Esta obra destina-se àqueles que desejam seguir o caminho da teoria dos autovalores e autovetores e destaca-se por conter exercícios resolvidos.

O livro *Introdução a Álgebra Linear* emerge em coautoria com Mina Carakushansky a partir das experiências de Guilherme de La Penha em ministrar e coordenar as disciplinas de álgebra I e II. É importante salientar que esse livro foi publicado pela McGraw-Hill em 1977, e adotado em diversas universidades brasileiras e, sua tradução *Introducción al álgebra linear*, em universidades da América Latina. Esse livro aborda principais objetos da álgebra linear: espaços vetoriais, sistemas de equações lineares, matrizes, transformações lineares e determinantes.

Apoiamo-nos em Chaquiam (2012) para traçar considerações a respeito dessas obras a da visão de Guilherme de La Penha no âmbito da álgebra linear. Em relação a essas produções, no que tange aos compêndios de álgebra linear escritos entre os anos de 1974 e 1977, La Penha ressaltou em seu último livro a motivação dessa produção:

A motivação principal foi o desejo de dar um tratamento conceitual moderno ao assunto, enfatizando-se a interação em álgebra linear das influências geométricas e algébricas e, concomitantemente, dando igual atenção a uma abordagem que visa às aplicações e os métodos de cálculo, responsáveis por uma grande parte do interesse e da importância do assunto.

(La Penha, 1976, *apud* Chaquiam, 2012, p. 157).

Esse comentário acerca de uma modernização da abordagem da álgebra linear, expressas pelas interações algébricas e geométricas, bem como da utilização dos métodos numéricos com vista ao uso da computação nos conduziram a refletir quanto à realização de um estudo com o intuito de caracterizar essa abordagem, isto é, as apresentações e representações de objetos da álgebra linear constante nesses livros tornou-se um caminho

para a compreensão dos objetos matemáticos envolvidos no sentido da modernidade ressaltada.

Tendo em vista a temática, álgebra linear, tornou-se necessário definir os objetos matemáticos para esse estudo, haja vista a impossibilidade de apresentarmos aqui uma análise completa de todos os livros e objetos matemáticos envolvidos num estudo dessa natureza. Nesse sentido, diante das dificuldades apresentadas pelos alunos na graduação, salientadas inicialmente, foram elencados os seguintes objetos da álgebra linear para compor a investigação: (in)dependência linear, geradores, base e dimensão num espaço vetorial.

A escolha dos objetos matemáticos relacionados à álgebra linear contribuiu à delimitação dos livros tomados para a realização deste estudo. Outro critério adotado foi a contemplação dos objetos apontados na obra. Portanto, da aplicação desses critérios resultaram os livros: *Álgebra Linear I e II* (1974), *Sinopse de Álgebra Linear* (1975) e *Introdução à Álgebra Linear* (1977).

Seguimos com as considerações a acerca dos aspectos metodológicos da pesquisa, nas quais constam o tipo de pesquisa, os procedimentos executados no decorrer do trabalho, o critério de escolha dos objetos da álgebra linear e em qual livro estes objetos são discutidos, além disso, apresenta-se a Análise do Conteúdo de Bardin (2016), que nos possibilitou a elaboração das categorias de análise dos citados livros de álgebra linear.

ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Conforme mencionado anteriormente, esta investigação caracteriza-se como documental, contudo, imbuídos de trabalhos produzidos acerca dessa temática e apoiados em Gil (2008) vimos que essa pesquisa enquadra-se no tipo bibliográfica-documental, definida como pesquisa em que se utiliza de material já elaborado e que se debruça sobre documentos que ainda não tiveram um tratamento analítico ou que podem ser reelaborados de acordo com o objetivo estabelecido, neste caso, os livros em que Guilherme de La Penha figura como autor ou coautor: *Álgebra Linear I e II* (1974), *Sinopse de Álgebra Linear* (1975) e *Introdução à Álgebra Linear* (1977).

A partir da vivência dos autores frente à disciplina Álgebra Linear, das discussões apresentadas por Chaquiam (2012) e das dificuldades dos alunos nesta disciplina, foram

selecionados tópicos nos quais os alunos demonstraram ter maior dificuldade de entendimento do conteúdo, quanto geração de significados ou representação geométrica dos resultados numéricos decorrentes do processo de manipulação, tópicos que integram os conteúdos fundamentais dessa disciplina, a saber, (in)dependência linear, geradores, base e dimensão de um espaço vetorial.

Por outro lado, Kripka *et al* (2015) apontam que a pesquisa documental é norteada por método e técnicas para apreensão, compreensão e análise de documentos. Nesse sentido, no incurso adotou-se a Teoria da Análise do Conteúdo, na perspectiva de Bardin (2016), com o intuito de nortear as investigações nos livros. A Análise do Conteúdo, enquanto metodologia é definida como sendo “um conjunto de técnicas de análises das comunicações que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens” (Bardin, 2016, p. 44). Em outras palavras, a análise do conteúdo nos possibilita inferir informações ocultas no texto escrito por meio de imagens a partir de objetivos preliminarmente definidos e mediante a decodificação das mensagens.

Embora esse caminho seja habitual nas ciências sociais, o seu caráter marcado por uma disparidade de formas é adaptável a outras áreas, dentre estas, a Matemática, fato que corroborou à sua utilização frente aos livros em tela. Segundo Bardin (2016), as inferências são alcançadas a partir de roteiro pré-estabelecido, organizado por três polos cronológicos: Pré-análise, Exploração do material e Tratamento dos resultados obtidos na interpretação.

A Pré-análise, etapa na qual se faz a escolha dos documentos a serem analisados, tem por objetivo a organização, embora ela própria seja composta por atividades não estruturadas. Neste estudo a escolha dos livros se deu por meio da regra de *representatividade*, uma vez que há certa homogeneidade quanto a abordagem metodológica dos objetos da álgebra linear nos livros supracitados, neste caso pode-se considerar essa amostra como representativa da abordagem metodológica nos livros como um todo. Outra regra adotada foi a regra de *pertinência*, visto que todos os livros escolhidos contêm os objetos de álgebra linear eleitos segundo os motivos acima apresentados. Posteriormente tem-se a formulação das hipóteses e dos objetivos e a elaboração de indicadores que basearam a interpretação (Bardin, 2016).

A exploração do material consiste na aplicação sistemática das decisões tomadas na Pré-Análise, na qual o pesquisador realiza operações de codificação, decomposição ou enumeração, em função das regras de antemão ordenadas. Segue-se para o tratamento dos

resultados obtidos na interpretação, onde o pesquisador pode propor inferências e adiantar interpretações a propósito dos objetivos previstos ou outras descobertas (Bardin, 2016).

Para organizar os dados brutos a fim de uma melhor investigação, Bardin (2016) aponta que a categorização desses dados é perfeita para esse objetivo, pois fornece de forma condensada uma representação simplificada destes, uma vez que evita desvios do material e dá conhecimento dos índices invisíveis ao nível dos dados brutos. Para tal fim, é necessário criar categorias, com as seguintes qualidades: exclusão mútua, homogeneidade, pertinência, objetividade, finalidade e produtividade (Bardin, 2016).

Diante dos pressupostos elencados e considerando o que se refere à exploração do material, para uma melhor organização dos dados e fluidez do trabalho, foram criadas três categorias para balizar as análises, sejam elas: (i) Introdução do conteúdo; (ii) Definição do objeto matemático e (iii) Utilização de diferentes representações do objeto matemático.

Na primeira categoria – Introdução do conteúdo – verificou-se de que forma são introduzidos os objetos *(In)dependência linear, Geradores, Base e Dimensão de um espaço vetorial* nos livros selecionados. Na segunda categoria – Definição do objeto matemático – observou-se o modo como são definidos os objetos matemáticos e, na terceira – Utilização de diferentes representações do objeto matemático – identificou-se como são abordadas as distintas representações do objeto matemático.

A seguir, serão apresentados os três livros selecionados, bem como as investigações destes sob as categorias elencadas com base na Análise de Conteúdo, tendo como propósito apresentar a organização e a abordagem metodológica a respeito da álgebra linear e, por fim, responder à questão balizadora desse estudo.

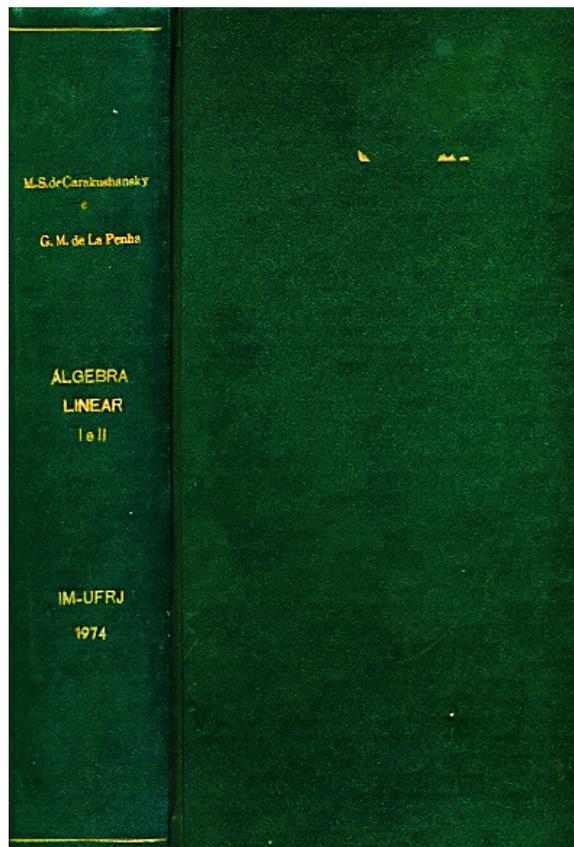
ANÁLISE DOS LIVROS DE ÁLGEBRA LINEAR

Aqui é apresentada apenas parte das análises executadas na pesquisa original, porém, os recortes proporcionam ao leitor uma ampla e pormenorizada visão do trabalho realizado. Nessa apresentação cada objeto de álgebra linear elencado anteriormente estará associado a um único livro, enquanto que na pesquisa todos os objetos foram observados em todos os livros. Assim, a análise de *(In)dependência linear* foi aplicada em *Álgebra Linear I e II* (1974); sobre *Geradores*, assentamo-nos em *Sinopse de Álgebra Linear*

(1975) e sobre *Base e Dimensão num espaço vetorial* restringimo-nos ao livro *Introdução à Álgebra Linear* (1977).

O livro *Álgebra Linear I e II*, publicado pela UFRJ em 1974, é composto por oito capítulos que contemplam: Noções de Conjuntos e Vetores; Sistemas de Equações Lineares; Espaços Vetoriais; Transformações Lineares; Introdução à Programação Linear; Determinantes; Autovetores e Autovalores e, por fim, Espaços com Produto Interno, além de conter apêndices sobre ângulos de Euler, notações Σ e π e operações algébricas. Sobre esta obra, são apresentadas análises referentes a *(In)dependência linear*.

Figura 1 – Capa do livro *Álgebra Linear I e II*.



Fonte: Livro do acervo pessoal do professor Miguel Chaquiam.

Dependência linear é introduzida com um exemplo numérico onde um vetor é combinação linear dos vetores das bases canônicas do \mathbb{R}^3 .

Consideremos o vetor $v_1 = [8, -9, 2]$ de \mathbb{R}^3 . Este vetor pode ser escrito como $8.[1, 0, 0] + (-9).[0, 1, 0] + 2.[0, 0, 1]$. De fato, se $[x_1, x_2, x_3]$ é qualquer vetor em \mathbb{R}^3 , temos que $[x_1, x_2, x_3] = x_1.[1, 0, 0] + x_2.[0, 1, 0] + x_3.[0, 0, 1]$. Vemos assim, que qualquer vetor do \mathbb{R}^3 , pode ser expresso

em termos dos três vetores fixos $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ e $[0, 0, 1]$. Queremos estudar agora o processo de geração de vetores e subespaços.

(Carakushansky; La Penha, 1974, p. 217).

Apresentam a ideia de independência linear baseada em conceitos anteriormente definidos como de geradores, combinação linear e dependência linear.

É óbvio que é mais fácil trabalhar com conjuntos finitos do que com conjuntos infinitos. Assim, em lugar de termos que saber quais são todos os vetores em v , podemos escolher um conjunto de vetores que gerem v (...). Se o conjunto de geradores é linearmente dependente, podemos eliminar alguns dos vetores e ainda ter um conjunto de geradores. Se o novo conjunto ainda é linearmente dependente, podemos eliminar outros vetores, e assim por diante, pelo método da exaustão. O conjunto ideal de vetores ao qual queremos chegar é que gere o espaço vetorial, mas que não seja linearmente dependente.

(Carakushansky; La Penha, 1974, p. 225).

Percebe-se que introduzem a ideia de dependência linear com exemplo numérico, seguida da formalização das noções de combinação linear, geradores e dependência linear. Independência linear é vista a partir da redução de vetores geradores linearmente dependentes até que restem apenas os linearmente independentes. Observa-se que há uma preocupação em manter interrelação entre os objetos matemáticos constante nos livros, interrelações que completam as definições.

No que tange à *definição do objeto matemático*, a *dependência linear* é definida por:

Um conjunto não vazio de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ de um espaço vetorial V é chamado linearmente dependente (abreviamente LD) se, e somente se, (pelos menos) um dos vetores v_i é combinação linear dos demais vetores desse conjunto, isto é, se e somente se, para algum v_i , podemos achar escalares convenientes designados por c_1 tais que $v_1 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_{i-1} v_{i-1} + c_{i+1} v_{i+1} + \dots + c_k v_k$.

(Carakushansky; La Penha, 1974, p. 218).

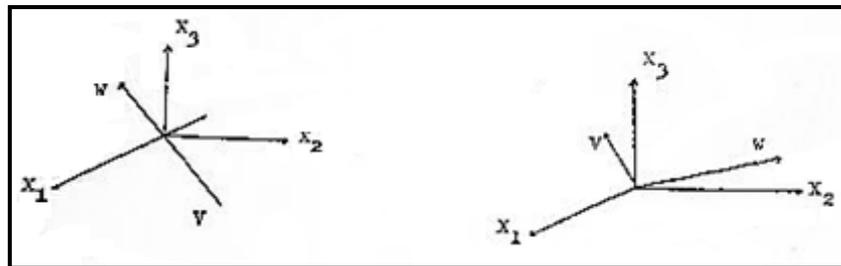
Com a ideia de redução de vetores geradores linearmente dependentes até que sejam linearmente independentes, definem esse novo conjunto do seguinte modo “Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ é linearmente independente se, e somente se, $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$ implicar que todos os c_i 's são nulos” (Carakushansky; La Penha, 1974, p. 225).

Observa-se que, embora sejam utilizados exemplos numéricos para a elucidação das definições, não abandonam a definição formal de *(In)dependência linear*, além de

complementá-la a partir de ideias numéricas. Além disso, observa-se uma interrelação entre os conceitos trabalhados, o que demonstra uma coerência de ideias.

Quanto a utilização de diferentes representações do objeto matemático, identificou-se pelo menos três tipos para *(in)dependência linear*, a saber: i) Representação em linguagem natural: “É evidente que v e w são linearmente independentes se, e somente se, um não é múltiplo escalar do outro” (Carakushansky; La Penha, 1974, p. 226); ii) Representação algébrica: De $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = 0$ tem-se todos os $c_i = 0$ e iii) Representação geométrica: É salientado que dois vetores são linearmente dependentes se eles são colineares, caso contrário, são linearmente independentes, conforme Figura 01.

Figura 2 – Vetores linearmente dependentes e independentes.

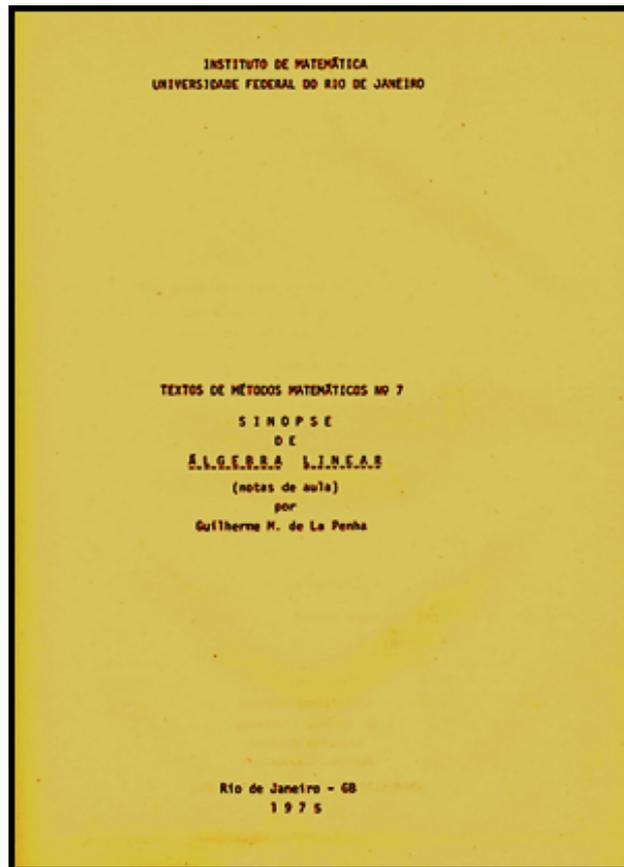


Fonte: Carakushansky e La Penha, 1974, p. 227.

A respeito das análises dos objetos *(In)dependência linear* nos livros *Álgebra Linear I e II*, observou-se que os autores buscam partir de ideias numéricas a fim de dar suporte as definições que são feitas com o rigor matemático necessário. Além disso, utilizaram as representações em linguagem natural, algébrica e geométrica na representação do supracitado objeto matemático.

Em relação ao livro *Sinopse de Álgebra Linear*, datado de 1975, é observável a presença de uma seção no livro intitulada “Ao leitor”, na qual afirma que estas notas eram exposições feitas durante o desenvolvimento da disciplina de Álgebra Linear para estudantes que iniciaram mestrado na COPPE e IM-UFRJ entre 1970 e 1973 e ainda justifica a ausência de alguns objetos matemáticos.

Figura 3 – Capa do livro Sinopse de Álgebra Linear.



Fonte: Livro do acervo pessoal do professor Miguel Chaquiam.

Essa obra não é dividida em capítulos, mas em 17 partes, sejam elas: Notação; Espaços Vetoriais; Dependência Linear e Bases; Construção de Bases e Dimensão; Aplicações Lineares e Isomorfismo I; Aplicações Lineares e Isomorfismo II; Subespaços; Estrutura das Aplicações Lineares; Inversas; Espaços Quocientes; Invariância, Redutibilidade e Projeções e Valores e Vetores Característicos, associado o apêndice Corpos Algebricamente Fechados.

Seguem com Complexificação; Formas Bilineares; Dualidade; Matrizes; Formas Cônicas de Transformações Lineares; Formas Matriciais Canônicas e Forma de Jordan. Finalizam com os Apêndices A e B, onde constam Operações Algébricas e Genealogia das Estruturas Algébricas Usuais, respectivamente.

Nesse livro são expostas as análises referentes aos vetores *Geradores* de um espaço vetorial. No que tange a *introdução ao conteúdo*, o conceito de suporte de família é base introdutória à definição de alguns objetos matemáticos ao longo do livro, dentre eles,

Geradores e, por isso, a introdução de geradores fica caracterizada como o conceito de suporte de família, que por sua vez é assim definida:

Seja $(v_i), i \in I$, uma família de vetores de V , chamamos suporte da família $(v_i), i \in I$, ao subconjunto J do conjunto de índices I , caracterizado por $J = \{i \in I \mid v_i \neq 0\}$, ou seja, o suporte de uma família de vetores caracteriza os elementos distintos de zero dessa família.

(La Penha, 1975 p. 18).

Em relação à *definição do objeto matemático*, os *Vetores Geradores* de um espaço vetorial são definidos em *Sinopse de Álgebra Linear* com base no conceito de família:

Um subconjunto G contido em V é denominado um sistema de geradores de $V(k)$ se todo vetor $v \in V$ é uma combinação linear de (pelo menos uma) família de vetores de G . O próprio conjunto V é evidentemente um sistema de geradores. Se G é um sistema de geradores de $V(k)$ e todo o vetor de G é uma combinação linear de vetores de um subconjunto G' contido em G ; segue-se então que G' é também um sistema de geradores de $V(k)$.

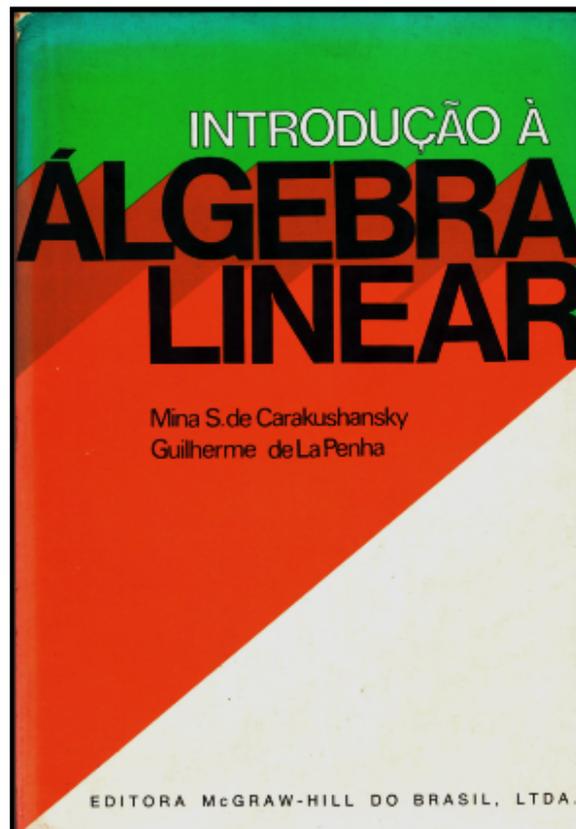
(La Penha, 1975, p. 22).

Embora se faça uso de conceitos adjacentes, como de suporte de família, observa-se que não é abandonado o formalismo matemático na definição acima. Em relação *utilização de diferentes representações do objeto matemático*, foi identificada apenas a representação algébrica, observada na própria definição. Tendo em vista que se trata de uma *Sinopse*, infere-se que outras representações deste objeto foram restringidas, visto que este livro é um resumo das principais definições e representações tratadas noutros livros.

No que tange aos *Vetores Geradores*, nota-se que esse objeto matemático é definido a partir do conceito de suporte de família de vetores, mantido o rigor matemático necessário. Além disso, foi identificada apenas a representação algébrica da definição desse objeto, dado a ausência de alguns objetos da álgebra linear justificada pelo autor.

O livro *Introdução à Álgebra Linear*, publicado em 1977 em coautoria com Mina Carakushansky, emerge da experiência de La Penha em ministrar e coordenar as disciplinas de Álgebra I e II. Este livro foi adotado por universidades brasileiras e sua tradução, *Introducción al álgebra linear*, por universidades na América Latina.

Figura 4 – Capa do livro *Introdução à Álgebra Linear*.



Fonte: Livro do acervo pessoal do professor Miguel Chaquiam.

Os conteúdos nesse livro estão divididos em cinco capítulos: Álgebra Vetorial e Geometria em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 ; Sistemas de Equações Lineares e Matrizes; Espaços Vetoriais; Transformações Lineares e Determinantes. É pertinente ressaltar que no prefácio do livro é apresentado o objetivo deste e os pressupostos de sua organização, com destaque para os cálculos e interpretações geométricas no \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

Em relação a este livro são expostas as análises referentes ao objeto *Base e Dimensão num espaço vetorial*. A respeito da *Introdução ao conteúdo*, nesse livro *Base* é introduzido a partir da seguinte situação:

Consideremos em \mathbb{R}^n , o conjunto de vetores $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ onde e_i é o vetor que tem zeros em todas as componentes exceto na i -ésima, que é 1.

$$e_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$$

Observamos primeiro que estes vetores são linearmente independentes. Pois supondo que $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$

Temos que $\alpha_1 [1, 0, \dots, 0] + \alpha_2 [0, 1, \dots, 0] + \dots + \alpha_n [0, 0, \dots, 1] = 0$ ou $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = [0, 0, \dots, 0]$. Assim, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Os vetores e_1, e_2, \dots, e_n também geram \mathbb{R}^n , pois se $v \in \mathbb{R}^n$, $v = [x_1, x_2, \dots, x_n] = x_1 [1, 0, \dots, 0] + x_2 [0, 1, \dots, 0] + \dots + x_n [0, 0, \dots, 1] = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

Como qualquer vetor v pode ser escrito como combinação linear de e_1, e_2, \dots , em vemos que e_1, e_2, \dots , em geram \mathbb{R}^n . Conjuntos deste tipo, que são linearmente independentes e que geram o espaço ao qual pertencem são muito importantes na Álgebra Linear.

(Carakushansky; La Penha, 1977, p. 169).

Percebe-se também no livro *Álgebra Linear I e II* a mesma forma empregada acima, ou seja, faz-se uso de uma situação contextualizada matematicamente, na qual se informa implicitamente as condições necessárias para que um conjunto de vetores possa ser uma base de um determinado espaço vetorial, isto é, esse conjunto deve ser linearmente independente e gerar o espaço. Embora não haja uma abordagem específica em relação à *dimensão de um espaço vetorial*, observa-se a inclusão desse objeto quando é abordado o conteúdo base de um espaço vetorial.

No que tange *definição do objeto matemático, base de um espaço vetorial* é exposta da seguinte forma: “Um conjunto de vetores $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é dito uma base para V se B é linearmente independente e B gera V ” (Carakushansky; La Penha, 1977, p. 169).

Em relação a *dimensão* de uma base de um espaço vetorial é apresentada a seguinte definição:

Seja $V \neq \{0\}$ um espaço vetorial. Então a dimensão de V é o número de vetores de uma base de V . No caso em que $V = \{0\}$ dizemos que V tem dimensão zero. Quando o número de vetores de uma base de V é finito diz-se que V é um espaço vetorial de dimensão finita.

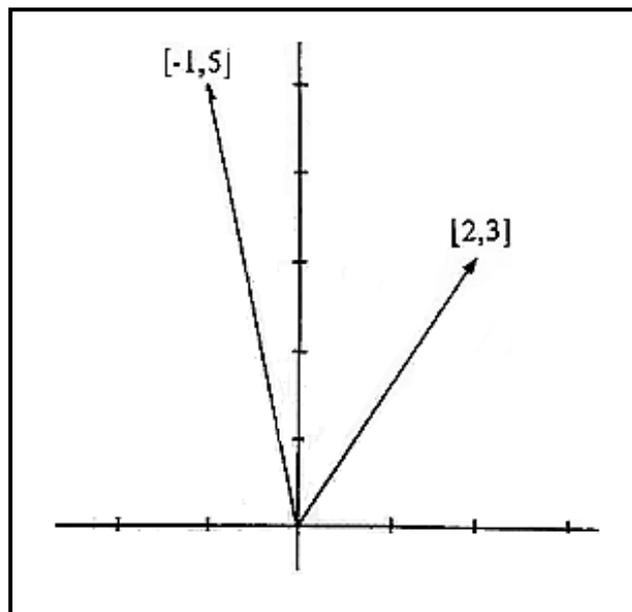
(Carakushansky; La Penha, 1977, p. 172).

Percebe-se no livro *Introdução à Álgebra Linear* que as definições de base e dimensão são apresentadas de maneira direta e objetiva. Em relação à base de um espaço vetorial pode-se inferir que o exemplo numérico apresentado antes facilita o entendimento da definição deste objeto.

Sobre *utilização de mais de uma representação do objeto matemático*, foram identificadas três representações de base e dimensão no livro em tela: Representação em linguagem natural: “Um conjunto de vetores B é dito uma base para V se B é linearmente independente e B gera V ” (Carakushansky & La Penha, 1969, p. 172), e ainda “Dimensão de V é o número de vetores de B ” (Carakushansky & La Penha, 1969, p. 172); Representação algébrica: Os autores ressaltam algebricamente que o conjunto dos vetores do \mathbb{R}^2 constituído por $(-1, 5)$ e $(2, 3)$ formam uma base do espaço vetorial usual \mathbb{R}^2 .

Ao afirmar que os vetores são linearmente independentes, mostram que a combinação linear nula constituída por esses vetores do \mathbb{R}^2 formam um sistema linear, cuja única possibilidade de solução ocorre quando todos os escalares dessa combinação forem nulos. E mais, qualquer vetor (x, y) do \mathbb{R}^2 pode ser escrito como combinação linear desses dois vetores, visto que ao igualarmos essa mesma combinação linear ao vetor (x, y) , obtêm-se escalares em função das coordenadas x e y do vetor arbitrário do \mathbb{R}^2 . A Representação geométrica: No primeiro exemplo, após a definição de base, os autores tratam de um conjunto de vetores que são base e mostram, geometricamente a partir dos vetores $(-1, 5)$ e $(2, 3)$ a razão de ser uma base, conforme vê-se na Figura 03.

Figura 5 – Base do espaço vetorial no \mathbb{R}^2 .



Fonte: Carakushansky e La Penha, 1977, p. 170.

Nessa figura é possível observar que os vetores $(-1, 5)$ e $(2, 3)$ formam uma base para o espaço vetorial \mathbb{R}^2 e o autores justificam essa configuração em termos geométricos. Segundo eles, os vetores são linearmente independentes por serem não colineares e gerar o plano em questão, dessa forma, geometricamente constituem-se numa base para o espaço \mathbb{R}^2 .

Observa-se no livro *Introdução à Álgebra Linear* que há uma introdução ao estudo da *base de um espaço vetorial* e que esta contribui à compreensão da definição, entretanto, não há uma introdução à *dimensão de espaço vetorial*, uma vez este tópico se

encontra inserido nos conteúdos relacionados à base. Destaca-se a maneira sucinta e objetiva que definem base e dimensão.

Diante das análises realizadas dos objetos *(In)dependência linear*, *Geradores e Base e Dimensão num espaço vetorial* constantes nos livros elencados – que vão além das que foram apresentadas neste recorte – foi possível caracterizar as apresentações e representações desses objetos. Em relação a *(In)dependência linear*, foi observado que partem de situações numéricas ou de conceitos suportes afim de que essas noções possibilitem uma maior compreensão dos objetos que serão definidos à frente, sem o abandono do rigor matemático nas definições e com exposições introdutórias que permitem uma maior compreensão das definições e representações.

No que diz respeito ao uso das representações de *(in)dependência linear*, foram identificadas pelo menos três maneiras nos livros analisados: representação em linguagem natural, representação algébrica e representação geométrica. Entretanto, no livro *Sinopse de Álgebra Linear* foi identificada apenas a representação algébrica, visto que se trata de um resumo das principais definições de álgebra linear constantes noutros livros.

Sobre *geradores*, foi observado que para introduzi-los faz-se uso de uma situação numérica de *(in)dependência linear*, no entanto, apresentam analogia para evidenciar os vetores que “criam” um espaço vetorial. No livro *Sinopse de Álgebra Linear* essa introdução é feita a partir da definição de suporte de família, conceito utilizado para definir posteriormente outros objetos matemáticos, dentre eles, *geradores*.

É possível perceber, em relação a definição de *geradores*, que utilizam ideias numéricas para introduzi-los e que não há o abandono do rigor matemático na definição desse objeto. No que concerne às representações de *geradores*, foram identificadas as representações em linguagem natural e representações geométricas, embora no livro *Sinopse de Álgebra Linear* tenha sido apresentada apenas a representação algébrica, justificada por se tratar de um resumo das principais definições da álgebra linear.

Em relação a introdução do conceito de *Base e dimensão num espaço vetorial* é possível observar a ideia de *base* eclode a partir de uma noção intuitiva na qual são informadas paralelamente as condições necessárias para que um conjunto de vetores seja uma base de um espaço vetorial. Além disso, não foi identificada uma introdução à *dimensão*, visto que esse objeto está inserido na apresentação de base de um espaço vetorial.

No que tange definições de base e dimensão, percebe-se que tais objetos são definidos de forma direta e com o rigor matemático que se faz necessário. Constatou-se que esses objetos foram representados em linguagem natural, algébricas e geométricas, nas quais são ressaltados elementos característicos de cada um.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os argumentos que corroboram no sentido de mostrar que a questão norteadora vinculada à pesquisa original, a saber, “*Como são apresentados e representados os objetos (In)dependência linear, Geradores, Base e Dimensão num espaço vetorial constantes em três livros de álgebra linear da década de 70, nos quais Guilherme de La Penha figura como autor ou coautor?*” estão apresentados a seguir, junto com considerações gerais à respeito da pesquisa realizada.

O comentário de Guilherme de La Penha sobre uma modernização na abordagem da álgebra linear por meio de interações algébricas e geométricas, e ainda utilização de métodos numéricos, conduziu-nos a questionar como seriam apresentados e representados os objetos matemáticos supracitados da referida disciplina nos livros analisados.

Em se tratando das análises dos objetos *(In)dependência linear, Geradores, Base e Dimensão num espaço vetorial*, percebeu-se que existem características comuns, assim como especificidades em cada livro ou em relação ao objeto. Também é possível perceber que as introduções dos objetos definidos para estudo, nos três livros, emergem a partir de uma situação numérica ou da abordagem de determinado conceito, a exemplo, família e vetores livres, que tem por finalidade proporcionar um melhor entendimento da definição e da representação dos objetos matemáticos a partir dessas noções introdutórias.

Contudo, mesmo diante dessas noções introdutórias, são mantidos o formalismo e o rigor matemático apropriado a cada uma das definições de *(In)dependência linear, Geradores, Base e Dimensão num espaço vetorial*. Essa situação corrobora com a ideia de que as noções introdutórias tinham por objetivo de dar suporte à compreensão das definições em pauta, bem como construir uma base para entendimento dos conteúdos apresentados na sequência. Acerca das representações, foram identificadas pelo menos três, sejam elas: representação em linguagem natural, representação algébrica e

representação geométrica, nas quais são realçadas características e especificidades dos objetos matemáticos em questão.

As investigações nos possibilitaram observar que estes livros, embora tratem da mesma temática, apresentam organizações e metodologias distintas, uma vez que cada livro tem objetivo diferenciado em relação à profundidade e amplitude do conteúdo, associada ao fato de estarem voltados a públicos alvos específicos. Tais fatos contribuíram positivamente em relação a pertinência das investigações efetuadas, haja vista que, embora estes livros se distingam em alguns aspectos, as características das apresentações e representações em sua essência são mantidas em todos os livros analisados, o que afigura uma abordagem marcante no ensino de álgebra linear.

Ao que concerne o ensino de álgebra linear é possível inferir que os autores buscaram clarificar os conteúdos dessa disciplina – reconhecida ainda hoje como uma das mais difíceis e com alto nível de abstração e complexidade – por meio das apresentações ou representações algébricas, geométricas ou numéricas, sem o abandono do formalismo e do rigor matemático. Este fato destaca preocupação dos autores com o ensino desses conteúdos, não limitado ao entendimento dos objetos matemáticos a um único plano, mas, em toda sua completude onde são evidenciados diversos aspectos e representações.

Nesse viés, a pesquisa documental realizada nos livros supracitados, adicionado ao conhecimento dos aspectos envolventes a estes, a exemplo, quem os produziu, sua finalidade, qual público alvo e sua intencionalidade, nos possibilitou a compreensão do fenômeno investigado, conforme salienta Kripka *et al* (2015), qual seja, a abordagem da álgebra linear nesses livros. Além disso, tomando por base as análises apresentadas e reflexões advindas destas, é possível (re)construir aspectos relacionados a organização sistemática e apresentação dos conteúdos desta disciplina.

Por fim, a análise desses livros nos possibilitou conhecer um pouco mais a visão e posicionamento dos autores, em particular o cientista paraense Guilherme de La Penha, quanto a apresentação e o ensino de álgebra linear, em especial sobre os objetos matemáticos supracitados, assim como o fazer do professor nesse período e, dessa forma, contribuir à constituição de acervos documentais ao patrimônio educacional brasileiro.

REFERÊNCIAS

- Bardin, L. (2016). *Análise do Conteúdo* (1ª ed.) Tradução: Luíz Antero Reto. São Paulo, Brasil: Edições 70.
- Carakushansky, M. S. & La Penha, G. M. S. M. (1974). *Álgebra Linear I* (1ª ed.). Rio de Janeiro, Brasil: UFRJ.
- Carakushansky, M. S. & La Penha, G. M. S. M. (1974). *Álgebra Linear II* (1ª ed.). Rio de Janeiro, Brasil: UFRJ.
- Carakushansky, M. S. & La Penha, G. M. S. M. (1976). *Autovalores e Diagonalização*. 1. ed. Rio de Janeiro, Brasil: UFRJ.
- Carakushansky, M. S. & La Penha, G. M. S. M. (1977). *Introdução à Álgebra Linear*. 1. ed. São Paulo, Brasil: McGraw-Hill.
- Carakushansky, M. S. (2010). Entrevista. In: Leal, A. B., Pereira, Í. S.; Munteal Filho, O. (Orgs.). *Sonho de uma polícia cidadã: Coronel Carlos Magno Nazareth Cerqueira*. Rio de Janeiro: NIBRAHC, p. 89-102.
- Chaquiam, M. (2012). *Guilherme de La Penha: Uma história do seu itinerário intelectual em três dimensões*. (Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil).
- Gil, A. C. (2008). *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 6. ed. São Paulo, Brasil: Editora Atlas.
- Kripka, R. M. L. et al. (2015). Pesquisa documental na pesquisa qualitativa: conceitos e caracterização. *Revista de investigaciones UNAD Bogotá*, 14(2), 0124-793X.
- La Penha, G. M. S. (1975). *Sinopse de Álgebra Linear*. 1. ed. Rio de Janeiro, Brasil: UFRJ.
- La Penha, G. M. S. (1962) *Álgebra vetorial*. 1. ed. Rio de Janeiro, Brasil: EPUC-Rio
- La Penha, G. M. S. (1964). Aplicação das Matrizes na Resolução de Sistemas de Equações lineares. *Revista LVMINNA SPARGERE*, 2(2).
- La Penha, G. M. S.; Silveira, H. S. (1964). *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica no Espaço*.
- Trojanowicz, R.; Bucqueroux, B. (1994). *Policiamento Comunitário: como começar*. Tradução Mina. Rio de Janeiro: Polícia Militar do Estado do Rio de Janeiro, Editora Parma.

Recebido: 30 de março de 2020
Aceito para publicação: 23 de abril de 2020